جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة المستنصرية
كلية التربية - قسم الرياضيات

حول

التطبيقات المغلقة -G

رسالة مقدمة إلى
مجلس كلية التربية - الجامعة المستنصرية
وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الرياضيات

من قبل

جمهور محمود إسماعيل العبيدي

بأشراف

الدكتور نادر جورج منصور

شوال / ١٤٢٢ هـ

كانون الثاني / ٢٠٠٢ م

بسم الله الرحمن الرحيم

قَالُوا سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا

إِنَّكَ أَنْتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ ۞

صدق الله العظيم

(البقرة-32)

توصية الأستاذ المشرف

أقر بأن إعداد هذه الرسالة جرت تحت أشرافي في قسم الرياضيات/ كلية التربيـــة/ الجامعة المستنصرية وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الرياضيات.

التوقيع:

المشرف: د. نادر جورج منصور

المرتبة العلمية: أستاذ مساعد

التاريخ: / 1 /2002

توصية رئيس قسم الرياضيات

بناء على التوصيات المتوفرة أرشح هذه الدراسة إلى لجنة المناقشة لدراستها وبيان الرأي فيها.

التوقيع:

الاسم: د. نادر جورج منصور

رئيس قسم الرياضيات / كلية التربية

التاريخ: / 1 /2002

إقرار لجنة المناقشة

نحن أعضاء لجنة المناقشة الموقعين أدناه نشهد بأننا أطلعنا على هذه الدراسة المقدمة من قبل الطالب **جمهور محمود إسماعيل العبيدي** الموسومة **((حول التطبيقات المغلقة-G))** وقد ناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها ونعتقد بأنها جديرة بالقبول بتقدير (**امتياز**) لنيل درجة ماجستير علوم في الرياضيات.

رئيس اللجنة

التوقيع:

الأسم: أ. د. عبد السميع عبد الرزاق الجنابي

المرتبة العلمية: أستاذ

التاريخ: 2002/1/22

عضو اللجنة

التوقيع:

الأسم: أ. د. هادي جابر مصطفى

المرتبة العلمية: أستاذ

التاريخ: 2002/1/22

عضو اللجنة

التوقيع:

الأسم: د. فاضل صبحي فاضل

المرتبة العلمية: أستاذ مساعد

التاريخ: 2002/1/22

عضو اللجنة (المشرف)

التوقيع:

الأسم: د. نادر جورج منصور

المرتبة العلمية: أستاذ مساعد

التاريخ: 2002/1/22

مصادقة عميد كلية التربية

أصادق على ما جاء بقرار اللجنة أعلاه.

التوقيع:

الأسم: أ. د. عبد المناف شكر النداوي

عميد كلية التربية / الجامعة المستنصرية

التاريخ: 2002/ ٢ / ٢

الإهداء

إلى من توسم في غرساً أوتي ثماره... والدي

حباً وعرفاناً

إلى روح والدتي الطاهرة التي غرست في فؤادي الحب والوفا...

رحمة وغفراناً

إلى سندي في الحياة الدنيا أخوتي وأخواتي وزوجتي...

وفاءً وإخلاصاً

إلى زينة الحياة الدنيا... أولادي جيل المستقبل... بشار، منار ومروان...

إلى الزهرتين الفواحتين... صغيراتي... آيات وإيمان...

إلى كل من وقف إلى جانبي من أقاربي وأصدقائي وأساتذتي...

أهدي هذا الجهد المتواضع

أهدي هذا الجهد المتواضع

جمهور العبيدي

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين حمداً وشكراً وافياً على ما هداني وأمدني به من فيض نعمته ورحمته لإتمام هذا العمل، والصلاة والسلام على سيد الخلق نبي الرحمة محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد، فلا يسعني وأنا أنهي رسالتي هذه إلا أن أتقدم بالشكر الجزيل إلى مشرفي وأستاذي الفاضل الدكتور **نادر جورج منصور** رئيس قسم الرياضيات لما قدمه من توجيهات سديدة ومتابعة دؤوبة أنارت الطريق امامي.

وأتقدم بالشكر والتقدير إلى رئاسة الجامعة المستنصرية وإلى عمادة كلية التربية وبالأخص السيد عميد كلية التربية الأستاذ الدكتور **عبد المناف شكر النداوي** لاتاحتهم الفرصة لي لإكمال الدراسة وتوفير مستلزماتها.

وأتقدم بالشكر والامتنان إلى جميع أساتذة قسم الرياضيات وأخص منهم بجزيل الشكر الأستاذ الدكتور **هادي جابر مصطفى** لما أبداه من توجيهات قيمة، وكذلك شكري الجزيل إلى زملائي في الدراسة ومنهم الأخوة **أمين حمود، سامي شارلمان وسليمان داود** الذين كانوا خير عونٍ لي في تذليل صعوبات الدراسة.

وكذلك لا بد ان أتقدم بالشكر والامتنان وعن بعد وعرفاناً بالجميل للأساتذة الأجانب الذين استجابوا لرسائلي وطلبي وأرسلوا لي عدداً من البحوث الحديثة حول موضوع رسالتي وهم الأستاذ الدكتور **T. Noiri** (اليابان)، الأستاذ الدكتور **M. Ganster** (النمسا)، الأستاذ الدكتور **V. Popa** (رومانيا)، الأستاذ الدكتور **Lj. Kocinac** (يوغسلافيا).

وجزيل شكري وتقديري إلى العاملين في مكتبة جامعة بغداد، والعاملين في مكتبة الجامعة المستنصرية، ومكتبة كلية التربية والعاملين في وحدة الانترنيت/ الجامعة المستنصرية لتعاونهم في توفير المصادر.

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى العاملين في معهد الواثق لعلوم الحاسبات الأخوة (**حارث، فارس، هاني**) لجهودهم المبذولة في طباعة الرسالة وبوقت قياسي.

وختاما شكري وتقديري لكل من ساهم في مد يد العون والمساعدة من عمل أو ملاحظة أو نصح.

وفق الله الجميع وجزى كل ذي نفع خير الجزاء.

جمهور العبيدي

المستخلص

في هذا العمل تمت دراسة بعض الصيغ من التطبيقات المغلقة-G، التطبيقات المغلقة-G^* والمغلقة-G^{**} والعلاقات التي تربط بينها ودراسة التطبيقات المستمرة-G والمستمرة-G^* والمستمرة-G^{**} والعلاقات التي تربط بينها أيضاً.

كما تمت دراسة بديهيات الفصل-G والصفات التي يتم الحفاظ عليها من قبل أنواع معينة من الدوال(مبرهنات المحافظة)على عدد من الفضاءات ومنها الفضاء $G\text{-}T_0$،$T_{1/2}$،$G\text{-}T_{1/2}$،$G\text{-}T_1$،$G\text{-}T_2$،$G\text{-}T_3$،$G\text{-}T_4$.

ومن النتائج التي حصلنا عليها ما يأتي:

1-إن صفة $G\text{-}T_0$، $G\text{-}T_{1/2}$، $G\text{-}T_1$، $G\text{-}T_2$ تنتقل من الفضاء X الى الفضاء Y بفعل التطبيقات المتباينة والمغلقة -G^* .

2-إن صفة منتظم -G وسوي -G تنتقل من الفضاء X الى الفضاء Y بفعل التطبيقات المتباينة والمستمرة والمغلقة -G.

المحتويات

Chapter One

الفصل الأول

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Basic Concepts

المقدمة

سنتناول في هذا الفصل التعاريف والمبرهنات الأساسية التي نحتاجها في هذه الرسالة.

ففي *البند الأول* من هذا الفصل ذكرنا عدداً من التعاريف وبعض المبرهنات التي تتعلق بالموضوع، وفي *البند الثاني* درسنا خواص المجموعات المغلقة-g (g-Closed sets) والمجموعات المفتوحة-g (g-Open sets) ومقارنتها بالخصائص المعروفة للمجموعات المغلقة والمجموعات المفتوحة. أما في *البند الثالث* فسوف نتناول العلاقة بين المجموعات المغلقة-g والمجموعات المغلقة-s (Semi-closed sets) وسنبين بأن هناك استقلالية تامة بين المفهومين. وسنطرح أيضاً خلال هذا الفصل مفهوم الفضاء $T_{½}$ الذي نحتاجه في الفصول الأخرى من الرسالة.

تعاريف ومبرهنات أساسية

Basic Definitions and Theorems

1-1-1 تعريف: [12]

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، تسمى المجموعة الجزئية A مـن X مجموعـة مغلقـة-g (g-closed set) إذا وفقط إذا، كان انغلاق المجموعة A (Closure of A) مجموعة جزئية مـن كل مجموعة مفتوحة O تحوي A. بمعنى آخر ($\overline{A} \subseteq O$ كلمـا كـانت $A \subseteq O$)، حيـث O مجموعة مفتوحة في X.

1-1-2 ملاحظة:

من الواضح بأن كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة-g لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح ذلك في المثال التالي.

1-1-3 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c, d\}$

$T = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ تبولوجي معرف على X.

ولتكن $A = \{c\}$

إذن $\overline{A} = \{c, d\}$

المجاميع المفتوحة التي تحوي A هي: $X, \{b, c, d\}$

وهي تحوي $\overline{A}$ أيضاً.

أي إن $\overline{A}$ مجموعة جزئية من كل مجموعة مفتوحة تحوي A.

إذن A مجموعة مغلقة-g ولكنها ليسـت مجموعـة مغلقـة.

1-1-4 تعريف: [12]

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، تسمى المجموعة الجزئية A من X مجموعة مفتوحـة-g (g-open set) إذا وفقط إذا كانت متممة A ($A^c = X-A$) مجموعة مغلقة-g.

1-1-5 ملاحظة:

من الواضح إن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة-g أما العكس فليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح ذلك في المثال التالي.

1-1-6 مثال:

في المثال (1-1-3)

لتكن $A = \{a, b, d\}$ واضح إنها مفتوحة-g. ولكنها ليست مجموعة مفتوحة.

الآن سنقوم باعطاء برهان للقضية التالية [9] التي سوف نحتاجها في برهان المبرهنة اللاحقة.

1-1-7 قضية مساعدة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً و $A \subseteq X$، فإن $(A^{o})^{c} = (\overline{A^{c}})$

البرهان:

معروف إن $(\overline{A^{c}}) = (A^{c})^{o} \cup b(A^{c})$

حيث $b(A^{c})$ النقاط الحدودية للمجموعة A^{c} (boundary of A^{c})

$(A^{c})^{o} = e(A)$

حيث $e(A)$ هي النقاط الخارجية للمجموعة A (exterior of A)

إذن $(\overline{A^{c}}) = e(A) \cup b(A^{c})$

$= e(A) \cup b(A)$ لأن $b(A) = b(A^{c})$

لكن $A^{o} \cup b(A) \cup e(A) = X$

و $A^{o} \cap b(A) \cap e(A) = \phi$

إذن $(A^{o})^{c} = b(A) \cup e(A)$

$= (\overline{A^{c}})$

إذن $(A^{o})^{c} = (\overline{A^{c}})$

□

والآن سنقوم بإعطاء مبرهنة حول تعريف جديد للمجموعة المفتوحة-g (g-open) والوارد في[15]

8-1-1 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً و $B \subseteq X$، فإن B تكون مجموعة مفتوحة-g إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مغلقة F جزئية من B، جزئية من B^o أيضاً.

وبمعنى آخر $(F \subseteq B^o$ كلما كانت $F \subseteq B)$ حيث F مجموعة مغلقة في X

البرهان: **الاتجاه الأول**

نفرض إن B مجموعة مفتوحة-g في X.

ولتكن F مجموعة مغلقة في X، بحيث أن $F \subseteq B$

سنبرهن أن $F \subseteq B^o$

بما أن $F \subseteq B$

إذن $B^c \subseteq F^c$

بما أن B مجموعة مفتوحة-g فإن B^c مجموعة مغلقة-g.

وبما أن F مجموعة مغلقة فإن F^c مجموعة مفتوحة.

إذن $(\overline{B^c}) \subseteq F^c$

لكن $(\overline{B^c}) = (B^o)^c$ (قضية 7-1-1)

إذن $(B^o)^c \subseteq F^c$

إذن $F \subseteq B^o$

الاتجاه الثاني

نفرض أن $F \subseteq B^o$ لكل مجموعة مغلقة $F \subseteq B$

سنبرهن أن B مجموعة مفتوحة-g.

أي بمعنى آخر B^c مجموعة مغلقة-g.

لتكن O مجموعة مفتوحة في X، بحيث إن $B^c \subseteq O$

إذن $O^c \subseteq B$

بما أن O مجموعة مفتوحة.

إذن O^c مجموعة مغلقة.

إذن $O^c \subseteq B^o$ حسب الفرض

إذن $(B^o)^c \subseteq O$

لكن $(B^o)^c = (\overline{B^c})$ [قضية 7-1-1]

إذن $(\overline{B^c}) \subseteq O$

إذن B^c مجموعة مغلقة-g.

إذن B مجموعة مفتوحة-g.

□

الآن سنقدم التعريف الجديد التالي.

1-1-9 تعريف:

ليكن (X, T) فضاء تبولوجيا، $A \subseteq X$،

سنرمز لانغلاق-g للمجموعة A (g-closure of A) بالرمز $\overline{A}^g$ ويعرف كما يلي:

$$\overline{A}^g = \cap \{V \subseteq X | V \text{ is g-closed set }, A \subseteq V\}$$

ونرمز لداخل-g للمجموعة A (g-interior of A) بالرمز A^{og} ويعرف كما يلي:

$$A^{og} = \cup \{F \subseteq X | F \text{ is g-open set }, F \subseteq A\}$$

1-1-10 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c\}$

و $T = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X.

ولتكن $A = \{a, b\}$

المجموعات المغلقة-g في X هي $\phi, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}$

المجموعات المفتوحة-g في X هي $\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

فإن $\overline{A}^g = X$

و $A^{og} = \{a, b\}$

1-1-11 ملاحظة:

ليكن (X, T) فضاء تبولوجيا، $A \subseteq X$

فإن $A \subseteq \overline{A}^g \subseteq \overline{A}$

و $A^o \subseteq A^{og} \subseteq A$

من المعلوم إنه إذا كان (X, T) فضاء تبولوجيا و $A \subseteq X$ فإن A تكون مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A = \overline{A}$. [6]

سنقوم بتعميم ذلك على المجموعات المغلقة-g حيث إنها تصح باتجاه واحد كما في المبرهنة التالية أما العكس فليس من الضروري أن يكون صحيحا كما مبين ذلك في الملاحظة التي تليها [ملاحظة 13-1-1].

1-1-12 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاء تبولوجيا و $A \subseteq X$، فإذا كانت A مجموعة مغلقة-g

فأن $A = \overline{A}^g$

البرهان:

نفرض إن A مجموعة مغلقة-g في X.

ونبرهن إن $A = \overline{A}^g$

واضح إن $A \subseteq \overline{A}^g$ [ملاحظة 11-1-1] ...(1)

وبما أن A مجموعة مغلقة-g حسب الفرض و $A \subseteq A$

إذن $\overline{A}^g \subseteq A$ حسب التعريف [9-1-1] ...(2)

من العلاقة (1) و (2)

نستنتج إن $A = \overline{A}^g$

□

1-1-13 ملاحظة:

معكوس المبرهنة (12-1-1) ليس من الضروري أن يكون صحيحا وكما موضح ذلك في المثال التالي.

1-1-14 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c, d\}$

و $T = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ تبولوجي معرف على X.

لتكن $A = \{b\}$

نلاحظ إن A ليست مجموعة مغلقة-g

لأن $A \subseteq \{a, b\}$، حيث $\overline{A} = \{b, c, d\}$

إذن $\overline{A} \not\subseteq \{a, b\}$

لكن $\overline{A}^g = \{b\} = A$

من المعلوم إنه إذا كان (X, T) فضاء تبولوجي و $A \subseteq X$ فإن A تكون مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $A = A^{o}$. [6]

الآن سنقوم بتعميم ذلك على المجموعات المفتوحة-g حيث إنها تتحقق باتجاه واحد كما مبين في المبرهنة اللاحقة أما المعكوس فليس من الضروري أن يكون صحيحاً كما مبين ذلك في الملاحظة التي تليها [ملاحظة 16-1-1].

1-1-15 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً و $A \subseteq X$، فإذا كانت A مجموعة مفتوحة-g في X فأن $A^{og} = A$

البرهان:

نفرض إن A مجموعة مفتوحة-g في X.

واضح إن $A^{og} \subseteq A$ [ملاحظة 11-1-1] ...(1)

وبما أن A مجموعة مفتوحة-g.

إذن $A \subseteq A^{og}$ حسب التعريف [9-1-1] ...(2)

من العلاقة (1) و (2)

نستنتج إن $A^{og} = A$

□

1-1-16 ملاحظة:

معكوس المبرهنة (15-1-1) ليس من الضروري أن يكون صحيحاً وكما سنلاحظ ذلك في المثال التالي.

1-1-17 مثال:

في المثال (14-1-1)

لتكن $A = \{a, c, d\}$

نلاحظ إن A ليست مجموعة مفتوحة-g

لكن $A^{og} = A$

1-1-18 ملاحظة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، فأن:

1- $\overline{X}^{g} = X$

2- $\overline{\phi}^{g} = \phi$

1-1-19 تعريف: [17]

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً، التطبيق $f : X \rightarrow Y$ يسمى تطبيق مغلق (Closed map) إذا كان لكل مجموعة مغلقة $W \subseteq X$ تكون المجموعة $f(W)$ مجموعة مغلقة في Y.

1-1-20 تعريف: [17]

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً، التطبيق $f : X \rightarrow Y$ يسمى تطبيق مفتوح (Open map) إذا كان لكل مجموعة مفتوحة $G \subseteq X$ تكون المجموعة $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y.

1-1-21 تعريف: [13]

ليكن $f : X \rightarrow Y$ تطبيق من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y، وكانت $A \subseteq X$ فإن قصر التطبيق f (Restriction) على A يعرف بالشكل التالي:

$f_A : A \rightarrow Y$ حيث $f_A(x) = f(x)$ لكل $x \in A$

1-1-22 تعريف: [10]

ليكن $f : X \rightarrow Y$ تطبيقاً،ولتكن $A \subseteq X$، المجموعة A تسمى مجموعة نظيرة (Inverse set) إذا وفقط إذا كان:

$$A = f^{-1}(f(A))$$

خواص المجموعات المغلقة-g والمجموعات المفتوحة-g
Properties of g-closed sets and g-open sets

سيتم خلال هذا البند توضيح بعض خواص المجموعات المغلقة-g والمجموعات المفتوحة-g لأن هذه المجموعات تعد أساسية في موضوع التطبيقات المغلقة -G. وسيتم توضيح هذه الخواص من خلال المبرهنات والنتائج التي سيتم عرضها خلال هذا البند.

1-2-1 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، $A \subseteq X$ فإن A مجموعة مغلقة-g إذا وفقط إذا كانت $(\overline{A} - A)$ لا تحتوي على مجموعة مغلقة غير خالية.

البرهان: **الاتجاه الأول**

لتكن F مجموعة مغلقة في X، بحيث أن $F \subseteq (\overline{A} - A)$

إذن $F \subseteq \overline{A}$ ...(1)

و $A \subseteq F^c$

لكن F^c مجموعة مفتوحة و A مجموعة مغلقة-g

إذن $\overline{A} \subseteq F^c$

إذن $F \subseteq (\overline{A})^c$ ...(2)

من العلاقة (1) و (2) نحصل أن

$$F \subseteq \overline{A} \cap (\overline{A})^c = \phi$$

إذن $F = \phi$

الاتجاه الثاني :

نفرض إن $A \subseteq O$ حيث O مجموعة مفتوحة في X.

إذا كان $\overline{A} \not\subseteq O$

فإن $\overline{A} \cap O^c \neq \phi$

ويكون مجموعة مغلقة غير خالية جزئية من $(\overline{A} - A)$

لكن $(\overline{A} - A)$ لا تحتوي على مجموعة مغلقة غير خالية.

إذن هذا تناقض

إذن $\overline{A} \subseteq O$

إذن A مجموعة مغلقة-g

□

1-2-2 نتيجة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، المجموعة المغلقة-g، $A \subseteq X$، تكون مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت $(\overline{A} - A)$ مجموعة مغلقة.

البرهان: الاتجاه الأول

نفرض أن A مجموعة مغلقة، وسنبرهن أن $(\overline{A} - A)$ مجموعة مغلقة.

إذن A مجموعة مغلقة-g ملاحظة [2-1-1]

إذن $\overline{A} - A = \phi$ مبرهنة [1-2-1]

الاتجاه الثاني

نفرض إن $(\overline{A} - A)$ مجموعة مغلقة، وسنبرهن أن A مجموعة مغلقة.

لكن A هي مجموعة مغلقة-g.

إذن $\overline{A} - A = \phi$ مبرهنة [1-2-1]

إذن $\overline{A} = A$

إذن A مغلقة.

□

من المعروف إن اتحاد مجموعتين مغلقتين يكون كذلك مجموعة مغلقة [9] وإن ذلك يكون صحيحاً أيضاً في المجموعات المغلقة-g كما سنلاحظ ذلك في المبرهنة التالية.

1-2-3 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن كل من A و B مجموعة مغلقة-g جزئية من X، فإن $A \cup B$ يكون مجموعة مغلقة-g في X.

البرهان:

نفرض أن O أي مجموعة مفتوحة في X، بحيث أن $A \cup B \subseteq O$

إذن $A \subseteq O$ و $B \subseteq O$

بما إن كل من A و B مجموعة مغلقة-g

فإن $\overline{A} \subseteq O$ و $\overline{B} \subseteq O$

إذن $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq O$

بما إن $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

إذن $\overline{A \cup B} \subseteq O$

لذلك فإن $A \cup B$ مجموعة مغلقة-g

□

من المعروف إن اتحاد عدد منتهي من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة أيضاً ولكن اتحاد عدد غير منتهي منها ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مغلقة. [9]

أما فيما يخص المجموعات المغلقة-g فيمكن تعميم المبرهنة أعلاه لعدد غير منتهي من المجموعات المغلقة-g كما يتضح ذلك من خلال النتيجة التالية.

1-2-4 نتيجة:

إذا كانت A_α عائلة من المجموعات المغلقة-g في X (لكل $\alpha \in \wedge$) فإن $\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha$ مجموعة مغلقة-g (حيث $\wedge$ دليل المجموعة).

البرهان:

نفرض $\{A_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ عائلة من المجموعات المغلقة-g في X.

ليكن $\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha \subseteq O$ حيث إن O مجموعة مفتوحة في X.

سنبرهن إن $\overline{\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha} \subseteq O$ أيضاً.

بما أن $\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha \subseteq O$ حسب الفرض

إذن $A_\alpha \subseteq O$ لكل $\alpha \in \wedge$

بما أن A_α مجموعة مغلقة-g لكل $\alpha \in \wedge$

إذن $\overline{A_\alpha} \subseteq O$ لكل $\alpha \in \wedge$

إذن $\bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_\alpha} \subseteq O$

والآن سنبرهن إن:

$$\bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha}$$

واضح ان $\bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha}$ ... (1)

نفرض إن النقطة $P \in \overline{\cup A_\alpha}$

وليكن N جواراً للنقطة P.

إذن $N \cap (\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_\alpha) \neq \phi$

إذن $\cup (N \cap A_\alpha) \neq \phi$

إذن يوجد $\alpha^{*} \in \wedge$

بحيث أن $N \cap A_{\alpha^{*}} \neq \phi$

إذن $P \in \overline{A_{\alpha^{*}}}$

$$\overline{A_{\alpha^{*}}} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_{\alpha}}$$

إذن $P \in \bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_{\alpha}}$

إذن $\overline{\cup A_{\alpha}} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_{\alpha}} \quad \ldots (2)$

من العلاقة (1) و (2)

نستنتج ان $\bigcup_{\alpha\in\wedge} \overline{A_{\alpha}} = \overline{\cup A_{\alpha}}$

إذن $\overline{\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_{\alpha}} \subseteq O$

وعليه فإن $\bigcup_{\alpha\in\wedge} A_{\alpha}$ مجموعة مغلقة-g.

□

من المعروف إن تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة أيضاً [9].

الملاحظة التالية تبين بأن ذلك ليس من الضروري أن يكون صحيحاً في المجموعات المغلقة-g.

1-2-5 ملاحظة:

تقاطع مجموعتين مغلقتين-g ليس من الضروري أن يكون مجموعة مغلقة-g وكما يتضح ذلك في المثال التالي.

1-2-6 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c\}$

وليكن $T = \{\phi, X, \{a\}\}$ تبولوجي معرف على X.

إذا كانت $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, c\}$

يلاحظ أن كل من A و B مجموعة مغلقة-g.

لكن $A \cap B = \{a\}$ ليست مجموعة مغلقة-g.

من المعلوم إنه إذا كان (X, T) فضاءً تبولوجياً، وكانت $B \subseteq A \subseteq X$، و B مجموعة مغلقة في A و A مجموعة مغلقة في X، فإن B مجموعة مغلقة في X [6].

سنقوم بتعميم ذلك على المجموعات المغلقة-g، حيث يتبين بأنها تصح على المجموعات المغلقة-g وحسب ما توضحه المبرهنة التالية.

1-2-7 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، فإذا كانت $B \subseteq A \subseteq X$، وكانت B مجموعة مغلقة-g في A، و A مجموعة مغلقة-g في X، فإن B مجموعة مغلقة-g في X.

البرهان:

لتكن $B \subseteq O$، حيث O مجموعة مفتوحة في X.

$$A \cap B \subseteq A \cap O$$

إذن $B \subseteq A \cap O$ لأن $B \subseteq A$ حسب الفرض.

لكن $A \cap O$ مجموعة مفتوحة (التبولوجي النسبي Relative Topology) و B مجموعة مغلقة-g في A حسب الفرض.

إذن $(\overline{B})_A \subseteq A \cap O$

$$A \cap \overline{B} \subseteq A \cap O \subseteq O$$

$$A \cap \overline{B} \subseteq O$$

إذن $A \subseteq (\overline{B})^c \cup O$

لكن $(\overline{B})^c \cup O$ مجموعة مفتوحة.

و A مجموعة مغلقة-g في X.

إذن $\overline{A} \subseteq (\overline{B})^c \cup O$

$$\overline{B} \subseteq \overline{A} \subseteq (\overline{B})^c \cup O$$

$$\overline{B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq O$$

إذن $\overline{B} \subseteq O$

إذن B مجموعة مغلقة-g في X.

□

بينا من خلال الملاحظة [5-2-1] بأن تقاطع مجموعتين مغلقتين-g ليس من الضروري أن يكون مجموعة مغلقة-g.

أما تقاطع مجموعة مغلقة-g مع مجموعة مغلقة فإنه يكون مجموعة مغلقة-g وكما سيتم توضيحه من خلال النتيجة التالية.

1-2-8 نتيجة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن A مجموعة مغلقة-g و B مجموعة مغلقة في X، فإن $A \cap B$ مجموعة مغلقة-g في X.

البرهان:

بما أن A مجموعة مغلقة-g في X و B مجموعة مغلقة في X

إذن $A \cap B$ مجموعة مغلقة في A

إذن $A \cap B$ مجموعة مغلقة-g في A ملاحظة [1-1-2].

بما أن $A \cap B$ مجموعة مغلقة-g في A و A مجموعة مغلقة-g في X.

إذن $A \cap B$ مجموعة مغلقة-g في X مبرهنة [1-2-7].

□

1-2-9 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، $A \subseteq X$، فإذا كانت A مجموعة مغلقة-g وكانت $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فإن B تكون مجموعة مغلقة-g.

البرهان:

للبرهنة على إن B مجموعة مغلقة-g.

سنبرهن إن $\overline{B} - B$ لا تحتوي على مجموعة مغلقة غير خالية.

بما أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$

إذن $B \subseteq \overline{A}$

إذن $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ ...(1)

حيث $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ لأن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة

وأن $A \subseteq B$ حسب الفرض

إذن $B^c \subseteq A^c$ ...(2)

بأخذ تقاطع العلاقتين (1) و (2) نحصل على

$$\overline{B} \cap B^c \subseteq \overline{A} \cap A^c$$

لكن $\overline{B} - B = \overline{B} \cap B^c$

إذن $\overline{B} - B \subseteq \overline{A} - A$

إذن $\overline{B} - B$ لا تحتوي على مجموعة مغلقة غير خالية لأنه إذا احتوت على ذلك.

نحصل على إن $A - \overline{A}$ تحتوي على مجموعة مغلقة غير خالية وهذا تناقض (لأن A مجموعة مغلقة-g).

إذن $B - \overline{B}$ لا تحتوي على مجموعة مغلقة غير خالية.

إذن B مجموعة مغلقة-g.

□

من المعلوم إنه إذا كان (X, T) فضاءً تبولوجياً، وكانت $B \subseteq A \subseteq X$، وكانت B مجموعة مغلقة في X فإن B مجموعة مغلقة في A. [6]

والآن سنقوم بتعميم ذلك على المجموعات المغلقة-g حيث يتضح من خلال المبرهنة اللاحقة بأنها تصح على المجموعات المغلقة-g أيضاً.

1-2-10 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، فإذا كانت $B \subseteq A \subseteq X$، وكانت B مجموعة مغلقة-g في X، فإن B مجموعة مغلقة-g في A.

البرهان:

لتكن $B \subseteq O$ حيث O مجموعة مفتوحة في A.

سنبرهن أن $(\overline{B})_A \subseteq O$

بما إن O مجموعة مفتوحة في A فإنه يوجد مجموعة مفتوحة G في X

بحيث إن $O = G \cap A$

$B \subseteq O = G \cap A \subseteq G$

إذن $B \subseteq G$

بما إن G مجموعة مفتوحة في X و B مجموعة مغلقة-g في X.

فإن $\overline{B} \subseteq G$

إذن $\overline{B} \cap A \subseteq G \cap A = O$

لكن $(\overline{B})_A = \overline{B} \cap A$

إذن $(\overline{B})_A \subseteq O$

إذن B مجموعة مغلقة-g في A.

□

سبق وأن بينا بأن تقاطع مجموعتين مغلقتين-g ليس من الضروري أن يكون مجموعة مغلقة-g [ملاحظة 5-2-1]

أما فيما يخص المجموعات المفتوحة-g فإن تقاطع مجموعتين مفتوحتين-g يكون مجموعة مفتوحة-g. وكما في المبرهنة التالية.

1-2-11 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن كل من A و B مجموعتين مفتوحتين-g في X، فإن $A \cap B$ مجموعة مفتوحة-g في X.

البرهان:

للبرهنة أن $A \cap B$ مجموعة مفتوحة-g.

سنبرهن أن $(A \cap B)^c$ مجموعة مغلقة-g.

لكن $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

بما أن كل من A و B مجموعتين مفتوحتين-g

فإن A^c و B^c مجموعتين مغلقتين-g.

إذن $A^c \cup B^c$ مجموعة مغلقة-g مبرهنة [1-2-3]

إذن $(A \cap B)^c$ مجموعة مغلقة-g.

إذن $(A \cap B)$ مجموعة مفتوحة-g.

□

1-2-12 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن كل من A و B مجموعتين مفتوحتين-g متباعدتين في X، فإن $A \cup B$ يكون مجموعة مفتوحة-g في X.

البرهان:

للبرهنة على أن $A \cup B$ مجموعة مفتوحة-g.

نفرض ان F مجموعة مغلقة في X، بحيث أن $F \subseteq A \cup B$

وسنبرهن إن $F \subseteq (A \cup B)^o$

بما أن $F \subseteq A \cup B$ بالفرض

إذن $F \cap \overline{A} \subseteq A$ و $F \cap \overline{B} \subseteq B$

لكن A مجموعة مفتوحة-g حسب الفرض.

$F \cap \overline{A}$ مجموعة مغلقة

إذن $F \cap \overline{A} \subseteq A^{o}$ ...(1)

وبالمثل فإن $F \cap \overline{B} \subseteq B^{o}$ ...(2)

بما أن $F \subseteq A \cup B$ حسب الفرض

إذن $F = F \cap (A \cup B)$

$F = (F \cap A) \cup (F \cap B)$

$F \subseteq (F \cap \overline{A}) \cup (F \cap \overline{B})$

إذن $F \subseteq A^{o} \cup B^{o}$

$F \subseteq (A \cup B)^{o}$

وعليه فإن $A \cup B$ مجموعة مفتوحة-g.

□

سبق وأن بينا بأن تقاطع مجموعتين مغلقتين-g ليس من الضروري أن يكون مجموعة مغلقة-g [ملاحظة 5-2-1]. النتيجة التالية تبين بأن ذلك يكون صحيحاً في حالة كون متممتيهما متباعدتين.

1-2-13 نتيجة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن كل من A و B مجموعتين مغلقتين-g في X، فإن $A \cap B$ يكون مجموعة مغلقة-g، إذا كانت A^{c} و B^{c} مجموعتين متباعدتين.

البرهان:

بما أن كل من A و B مجموعة مغلقة-g بالفرض

فإن كل من A^{c} و B^{c} مجموعة مفتوحة-g تعريف [1-1-4]

وبما أن A^{c} و B^{c} مجموعتين متباعدتين بالفرض

إذن $A^{c} \cup B^{c}$ مجموعة مفتوحة-g مبرهنة [1-2-12]

إذن $(A \cap B)^{c}$ مجموعة مفتوحة-g

إذن $(A \cap B)$ مجموعة مغلقة-g.

□

المبرهنة التالية تبين بأن المبرهنة [1-2-7] تصح على المجموعات المفتوحة-g.

1-2-14 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $A \subseteq B \subseteq X$، فإذا كانت A مجموعة مفتوحة-g في B، وكانت B مجموعة مفتوحة-g في X، فإن A مجموعة مفتوحة-g في X.

البرهان:

للبرهنة على أن A مجموعة مفتوحة-g في X.

نفرض ان F مجموعة مغلقة في X.

بحيث أن $F \subseteq A$ وسنبرهن بأن $F \subseteq A^o$

بما أن A مجموعة مفتوحة-g في B، وإن $F \subseteq A$ حسب الفرض

إذن $F \subseteq (A^o)_B$

إذن توجد مجموعة مفتوحة $G=O \cap B$ في B.

بحيث إن $F \subseteq O \cap B \subseteq A$

حيث O مجموعة مفتوحة في X.

أي أن $F \subseteq O$ و $F \subseteq B$

بما أن B مجموعة مفتوحة-g في X

وإن $F \subseteq B$

إذن $F \subseteq B^o$

إذن توجد مجموعة مفتوحة O^* في X

بحيث إن $F \subseteq O^* \subseteq B$

حيث O^* مجموعة مفتوحة في X.

بما أن $F \subseteq O$ و $F \subseteq O^*$

$F \subseteq O \cap O^* \subseteq O \cap B \subseteq A$

وبما إن $O \cap O^*$ مجموعة مفتوحة في X

إذن $F \subseteq A^o$

وعليه فإن A مجموعة مفتوحة-g في X.

□

المبرهنة التالية تناظر المبرهنة [1-2-9] بخصوص المجموعات المفتوحة-g.

1-2-15 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، ولتكن A مجموعة مفتوحة-g في X، فإذا كانت $A \subseteq B \subseteq A^{o}$ فإن B مجموعة مفتوحة-g.

البرهان:

للبرهنة على إن B مجموعة مفتوحة-g، سنبرهن إن B^{c} مجموعة مغلقة-g.

بما أن $A^{o} \subseteq B \subseteq A$

إذن $A^{c} \subseteq B^{c} \subseteq (A^{o})^{c}$

وبما أن $(A^{o})^{c} = (\overline{A^{c}})$ قضية [1-1-7]

إذن $A^{c} \subseteq B^{c} \subseteq \overline{A^{c}}$

لكن A مجموعة مفتوحة-g حسب الفرض

إذن A^{c} مجموعة مغلقة-g

إذن B^{c} مجموعة مغلقة-g مبرهنة [1-2-9]

وعليه فإن B مجموعة مفتوحة-g.

□

والآن سنقدم القضية المساعدة التالية التي نحتاجها في برهان المبرهنة اللاحقة.

1-2-16 قضية مساعدة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، و $A \subseteq X$، فإن $\left(\overline{A} - A\right)^{o} = \phi$

البرهان:

لبرهنة ذلك نفرض العكس أي نفرض إن: $\left(\overline{A} - A\right)^{o} \neq \phi$

إذن يوجد على الأقل عنصر واحد x ينتمي إليها

$$x \in \left(\overline{A} - A\right)^{o}$$

إذن توجد مجموعة مفتوحة G في X

بحيث $x \in G \subseteq (\overline{A} - A)$

إذن $x \notin A$ و $x \in \overline{A}$

بما إن $x \in \overline{A}$

فإن $G \cap A \neq \phi$

وهذا تناقض لأنه بما إن $G \subseteq (\overline{A} - A)$

فإن $G \cap A = \phi$

إذن $(\overline{A} - A)^{o} = \phi$

□

1-2-17 مبرهنة:

ليكن (X, T) فضاءً تبولوجياً، و $A \subseteq X$ فإن A تكون مجموعة مغلقة-g إذا وفقط إذا كانت $(\overline{A} - A)$ مجموعة مفتوحة-g.

البرهان: **الاتجاه الأول**

نفرض إن A مجموعة مغلقة-g وسنبرهن إن $(\overline{A} - A)$ مجموعة مفتوحة-g.

لتكن F مجموعة مغلقة في X.

بحيث أن $F \subseteq (\overline{A} - A)$ وسنبرهن إن $F \subseteq (\overline{A} - A)^{o}$

بما إن A مجموعة مغلقة-g.

إذن $(\overline{A} - A)$ لا تحوي على مجموعة مغلقة غير خالية مبرهنة [1-2-1]

أي إن $F = \phi$

إذن $F \subseteq (\overline{A} - A)^{o}$

عليه فإن $(\overline{A} - A)$ مجموعة مفتوحة-g.

الاتجاه الثاني

نفرض إن $(\overline{A} - A)$ مجموعة مفتوحة-g وسنبرهن إن A مجموعة مغلقة-g.

لتكن O مجموعة مفتوحة في X.

بحيث إن $A \subseteq O$

إذن $O^{c} \subseteq A^{c}$

$$\overline{A} \cap O^{c} \subseteq \overline{A} \cap A^{c}$$

$$\overline{A} \cap O^{c} \subseteq \overline{A} - A$$

بما إن $(\bar{A} \cap O^c)$ مجموعة مغلقة و $(\bar{A} - A)$ مفتوحة-g حسب الفرض

إذن $\bar{A} \cap O^c \subseteq (\bar{A} - A)^o$

لكن $(\bar{A} - A)^o = \phi$ قضية [1-2-16]

إذن $\bar{A} \cap O^c = \phi$

إذن $\bar{A} \subseteq O$

و عليه فإن A مجموعة مغلقة-g.

□

العلاقة بين المجموعات المغلقة-g والمجموعات المغلقة-s
The relation between g-closed set and s-closed set

في هذا البند سوف نتناول العلاقة بين مفهوم المجموعات المغلقة-g والمجموعات المغلقة-s حيث سنبين بأن هناك استقلالية تامة بين المفهومين أعلاه. وكذلك سنطرح مفهوم الفضاء $T_{1/2}$ ونبين بأنه يقع بين الفضاء T_0 والفضاء T_1.

سبق وأن ذكرنا بأن كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة-g [ملاحظة 2-1-1] وفي [22] تمت دراسة المجموعات المغلقة-s وتم تعريفها تعريفين متكافئين.

1-3-1 تعريف: [22]

ليكن X فضاءً تبولوجياً، $A \subseteq X$، A تسمى مجموعة مغلقة-s (شبه مغلقة) (semi-closed set). إذا وجدت مجموعة مغلقة F في X بحيث أن:

$$F^o \subseteq A \subseteq F$$

1-3-2 تعريف: [22]

ليكن X فضاءً تبولوجياً، $A \subseteq X$، A تسمى مجموعة مغلقة-s إذا كانت:

$$(\overline{A})^o \subseteq A$$

1-3-3 ملاحظة: [22]

ليكن X فضاءً تبولوجياً، $A \subseteq X$، A تسمى مجموعة مفتوحة-s إذا كانت A^c مجموعة مغلقة-s.

1-3-4 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c\}$

و $T = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

فإن المجموعات المغلقة في X هي $\{\phi, X, \{b, c\}, \{c\}\}$

المجموعات المغلقة-s في X هي $\{\phi, X, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}\}$

المجموعات المفتوحة-s في X هي $\{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

1-3-5 ملاحظة: [22]

من الواضح إن كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة-s ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً كما في المثال (1-3-4).

والآن سوف ندرس العلاقة بين مفهومي المجموعات المغلقة-g والمجموعات المغلقة-s لأنه كما لاحظنا في ملاحظة [1-1-2] إن كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة-g وفي الملاحظة [1-3-5] كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة-s.

وهنا سوف نثبت بأن المفهومين أعلاه مستقلين تماماً وكما يتبين ذلك في الأمثلة الأربعة التالية.

المثال التالي يبين بأن هناك مجموعات مغلقة-g ومغلقة-s بنفس الوقت.

1-3-6 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c, d\}$

وليكن $T = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ تبولوجي معرف على X

المجموعات المغلقة هي: $\{\phi, X, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a\}\}$

لتكن $A = \{c\}$

فإن A مجموعة مغلقة-g ومغلقة-s بنفس الوقت.

لأن $\overline{A} = \{c, d\}$

لاحظ إن $\overline{A}$ جزئية من كل المجموعات المفتوحة التي تحوي A وهي X و $\{b, c, d\}$

وكذلك مغلقة-s لأنه لو أخذنا المجموعة المغلقة $G = \{c, d\}$ فإن $G^o = \{\phi\}$

إذن $\phi \subseteq \{c\} \subseteq \{c, d\}$

أي إن $G^o \subseteq A \subseteq G$

المثال التالي يبين بأن هناك مجموعات مغلقة-g وليست مغلقة-s.

1-3-7 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c\}$

وليكن $T = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X

المجموعات المغلقة $\{X, \phi, \{b, c\}, \{c\}\}$

لتكن $A = \{a, c\}$ فإن $\overline{A} = X$

إذن A مجموعة مغلقة-g لأن المجموعات المفتوحة التي تحتوي A هي X فقط وهي جزئية من $\overline{A}$ أيضاً. وليست مجموعة مغلقة-s لأن: $(\overline{A})^o = X \not\subseteq A$

المثال التالي يبين بأن هناك مجموعات مغلقة-s وليست مغلقة-g.

1-3-8 مثال:

ليكن (R, T_u) التبولوجي الاعتيادي على R.

ولتكن $A = [0, 1)$

فإن A مجموعة مغلقة-s وليس مجموعة مغلقة-g.

لأن $\overline{A} = [0, 1]$ و $(\overline{A})^o = (0, 1)$

نستنتج إن $(\overline{A})^o \subseteq A$

إذن A مجموعة مغلقة-s وليست مغلقة-g

لأنه إذا كانت $O = (-1, 1)$ فترة مفتوحة في R.

$A \subseteq O$ لكن $\overline{A} \not\subseteq O$

إذن A ليست مجموعة مغلقة-g.

المثال التالي يبين بأن هناك مجموعات ليست مغلقة-g وليست مغلقة-s.

1-3-9 مثال:

في المثال 1-3-7.

ليكن $A = \{a, b\}$

لاحظ إن A ليست مجموعة مغلقة-g وليست مجموعة مغلقة-s.

لأن $\overline{A} = X$

وإن $A \subseteq \{a, b\}$ لكن $\overline{A} \not\subseteq \{a, b\}$

إذن A ليست مجموعة مغلقة-g، وإنها ليست مغلقة-s أيضاً

لأن $(\overline{A})^o = X \not\subseteq A$

لذا فإن هناك استقلالية تامة بين مفهومي المجموعات المغلقة-g والمجموعات المغلقة-s.

والآن سوف ندرس الفضاء $T_{½}$ والذي سنحتاجه في الفصول الأخرى من هـــذه الرســالة والذي يقع بين الفضاء T_0 والفضاء T_1.

1-3-10 تعريف:

ليكن X فضاءً، يقال إن X فضاء $T_{½}$ إذا حقق أحد الشرطين المتكافئين التاليين:

1- إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مغلقة-g هي مجموعة مغلقة [12].

2- إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة أحادية (Singleton) مجموعة مفتوحة أو مغلقة [7].

أنظر [5] الذي يبين إن الشرطين (1) و (2) أعلاه متكافئان.

1-3-11 مبرهنة: [12]

كل فضاء $T_{½}$ هو فضاء T_0.

1-3-12 مبرهنة: [12]

كل فضاء T_1 هو فضاء $T_{½}$.

1-3-13 نتيجة: [12]

الفضاء $T_{½}$ يقع بين الفضاء T_0 والفضاء T_1.

Chapter Two

الفصل الثاني

الفصل الثاني

بعض خواص التطبيقات المغلقة-G

Certain Properties of G-closed Mappings

المقدمة

سندرس في هذا الفصل التطبيقات المغلقة-G وأنـــواع أخــرى مــن التطبيقات المغلقة منها التطبيقات المغلقة-G^* والتطبيقات المغلقة-G^{**} وكذلـك سندرس أنماط جديدة من التطبيقــات المســتمرة-G ومنــها المســتمرة-G^* والمستمرة-G^{**} وسيتضمن هذا الفصل أيضاً دراسة لبعض خـــواص هــذه التطبيقات ومنها القصر والتركيب.

حيث تضمـــن *البنــد الأول* التطبيقــات المغلقــة-G، والمغلــقة-G^* والمغلقة-G^{**}، أما *البند الثاني* فتضمن خاصية القصر لهذه التطبيقات وتضمن *البند الثالث* خاصية التركيب لها.

التطبيقات المغلقة - G

G-Closed maps

سندرس في هذا البند التطبيقات المغلقة -G ونقدم نوعين جديدين منها وهي التطبيقات المغلقة-G^* والمغلقة-G^{**}، ودراسة بعض خواصها من خلال المبرهنات والنتائج وعرض مخطط لتوضيح العلاقة بين التطبيقات المغلقة والمغلقة-G والمغلقة-G^* والمغلقة-G^{**}.

وكذلك دراسة التطبيقات المستمرة-G وتقديم التطبيقات المستمرة-G^* والمستمرة-G^{**} ودراسة بعض خواصها أيضاً من خلال المبرهنات والنتائج وتقديم مخطط لتوضيح العلاقة بين التطبيقات المستمرة والمستمرة-G والمستمرة-G^* والمستمرة-G^{**}.

2-1-1 تعريف:

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً يسمى التطبيق $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G (مفتوح-G) إذا كان لكل مجموعة مغلقة (مفتوحة) $W \subseteq X$ تكون المجموعة $f(W)$ مجموعة مغلقة-g (مفتوحة -g) في Y .

2-1-2 مثال:

ليكن $X=\{a,b,c\}$

و $T_1=\{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X.

$T_2=\{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي آخر معرف على X.

ونعرف التطبيق $f : (X, T_1) \to (X, T_2)$

كما يلي $f(x) = x$

فإن f تطبيق مغلق-G (ومفتوح-G).

2-1-3 ملاحظة:

كل تطبيق مغلق (مفتوح) يكون تطبيق مغلق-G (مفتوح-G) لكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً كما مبين ذلك في المثال التالي.

2-1-4 مثال:

في المثال[2-1-2]

f تطبيق مغلق-G (مفتوح-G) لكنه ليس تطبيق مغلق (مفتوح)

لأن $\{a, c\}$ مجموعة مغلقة في T_1

و $\{b\}$ مجموعة مفتوحة في T_1

لكن $f(a, c)=\{a, c\}$ لا تكون مغلقة في T_2.

$f(b)=\{b\}$ ليس مجموعة مفتوحة في T_2.

2-1-5 مبرهنة:

ليكن كل من X, Y فضاءً تبولوجياً والتطبيق $f: X\to Y$ يكون تطبيق مغلق-G إذا وفقط إذا كان لكل $S \subseteq Y$ ولكل مجموعة مفتوحة $U \subseteq X$، بحيث إن $f^{-1}(S) \subseteq U$، توجد مجموعة مفتوحة-g، V في Y بحيث إن $S \subseteq V$ و $f^{-1}(V) \subseteq U$

البرهان: الاتجاه الأول

نفرض إن f تطبيق مغلق-G

ولتكن $S \subseteq Y$ و U أي مجموعة مفتوحة في X

بحيث إن $f^{-1}(S) \subseteq U$

لتكن $V=Y-f(X-U)$

بما إن U مجموعة مفتوحة في X.

إذن $X-U$ مجموعة مغلقة في X.

وبما إن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(X-U)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

إذن $V=Y-f(X-U)$ مجموعة مفتوحة-g في Y.

والآن للبرهنة إن $S \subseteq V$

ليكن $y \notin V$

إذن $y \in f(X-U)$

إذن يوجد $x \in (X-U)$ بحيث إن $f(x)=y$

إذن $x \notin U$

نستنتج انه $x \notin f^{-1}(S)$

إذن $f(x) \notin S$

إذن $y \notin S$

إذن $S \subseteq V$

وللبرهنة بأن $f^{-1}(V) \subseteq U$

$$f^{-1}(V)=f^{-1}(Y-f(X-U))$$
$$=f^{-1}(Y)-f^{-1}[f(X-U)]$$

$\subseteq X-(X-U)=U$

وعليه $f^{-1}(V)\subseteq U$

الاتجاه الثاني:

للبرهنة إن f يكون تطبيق مغلق-G لتكن H مجموعة مغلقة في X

إذن $U=X-H$ مجموعة مفتوحة في X لتكن $S=Y-f(H)$ أي مجموعة في Y

$$f^{-1}(S)=f^{-1}(Y-f(H))$$
$$=f^{-1}(Y)-f^{-1}[f(H)]$$
$$=X-f^{-1}[f(H)]$$
$$\subseteq X-H=U$$

إذن $f^{-1}(S)\subseteq U$

لكن توجد مجموعة مفتوحة-g، V في Y

بحيث إن $S\subseteq V$ و $f^{-1}(V)\subseteq U$ حسب الفرض

وهذا يعني أن $Y-f(H)\subseteq V$ و $f^{-1}(V)\subseteq X-H$

نستنتج إن $Y-f(H)\subseteq V$ و $V\subseteq f(X-H)$

إذن $Y-f(H)\subseteq V$ و $V\subseteq Y-f(H)$

$V=Y-f(H)$

بما إن V مجموعة مفتوحة-g في Y

إذن $Y-f(H)$ مجموعة مفتوحة-g في Y

إذن $f(H)$ مجموعة مغلقة-g في Y

وعليه f تطبيق مغلق-G.

□

2-1-6 تعريف:

ليكن كل من Y, X فضاءً تبولوجياً، التطبيق $f: X \to Y$ يسمى تطبيق مغلق-G^* (مفتوح-G^*) إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة-g (مفتوحة-g) $H\subseteq X$ تكون المجموعة $f(H)$ مجموعة مغلقة (مفتوحة) في Y.

2-1-7 مثال:

ليكن $X=\{a, b, c\}$

$T_1=\{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X

$T_2=\{\phi, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ تبولوجي آخر معرف على X

نعرف التطبيق $f:(X, T_1) \to (X, T_2)$ كما يلي:

$f(a)=f(b)=c,\ f(c)=a$

إذن f يكون تطبيق مغلق-G^* (ومفتوح-G^*)

2-1-8 تعريف:

ليكن كل من Y, X فضاءً تبولوجياً، التطبيق $f: X \to Y$ يسمى تطبيق مغلق -G^{**} (مفتوح-G^{**}) إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة-g (مفتوحة-g) في $H \subseteq X$ تكون المجموعة $f(H)$ مجموعة مغلقة-g (مفتوحة-g) في Y.

2-1-9 مثال:

ليكن (X, T) أي فضاءً تبولوجياً

وليكن (Y, D) التبولوجي المبعثر (Discrete topology)

فأن أي تطبيق $f:(X, T) \to (Y, D)$ يكون تطبيق مغلق-G^{**} (ومفتوح-G^{**}).

2-1-10 مبرهنة: [22]

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين فأن f يكون تطبيق مفتوح إذا وفقط إذا كان f تطبيق مغلق.

يمكن تعميم المبرهنة [2-1-10] أعلاه على التطبيقات المغلقة -G والمغلقة-G^* والمغلقة-G^{**} وكما يلي:

2-1-11 قضية:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين فأن العبارتين أدناه متكافئتين:

1. f تطبيق مغلق-G.
2. f تطبيق مفتوح-G.

البرهان:

نفرض العبارة (1) صحيحة ونبرهن (2).

لتكن W مجموعة مفتوحة في X.

إذن W^c مجموعة مغلقة في X.

بما أن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(W^c)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

إذن $[f(W^c)]^c$ مجموعة مفتوحة-g في Y.

لكن $[f(W^c)]^c = f(W)$.

إذن $f(W)$ مجموعة مفتوحة-g في Y.

وعليه f تطبيق مفتوح-G.

وبنفس الطريقة نبرهن الأتجاه الثاني (2) ⇐ (1).

□

وبنفس الطريقة نبرهن القضايا (12-1-2) و (13-1-2) أدناه:

2-1-12 قضية:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين فأن العبارتين أدناه متكافئتين:

1. f تطبيق مغلق-G^*.
2. f تطبيق مفتوح-G^*.

2-1-13 قضية:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين فأن العبارتين أدناه متكافئتين:

1. f تطبيق مغلق-G^{**}.
2. f تطبيق مفتوح-G^{**}.

2-1-14 قضية:

كل تطبيق مغلق-G^* يكون تطبيق مغلق.

البرهان:

ليكن كل من X و Y فضاء تبولوجيا.

والتطبيق $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^* ولتكن H مجموعة مغلقة في X.

إذن H مجموعة مغلقة-g في X ملاحظة [2-1-1].

بما ان f تطبيق مغلق-G^*.

إذن $f(H)$ مجموعة مغلقة في Y.

وعليه f تطبيق مغلق.

□

2-1-15 ملاحظة:

معكوس القضية (2-1-14) ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، وكمثال على ذلك:

لتكن $X=\{a, b, c\}$

$T=\{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

إذا عرفنا التطبيق $f : (X, T) \to (X, T)$ كما يلي:

$f(a)=a, \quad f(b)=b, \quad f(c)=c.$

فإن f تطبيق مغلق لكنه ليس تطبيق مغلق-G^* لأن $\{b\}$ مجموعة مغلقة-g في X.

لكن $f(\{b\}) = \{b\}$ ليست مجموعة مغلقة في X.

2-1-16 نتيجة:

كل تطبيق مغلق-G^* تطبيق مغلق-G.

البرهان:

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً.

والتطبيق $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^*.

إذن f تطبيق مغلق قضية [2-1-14].

وعليه f تطبيق مغلق-G ملاحظة [2-1-3].

□

2-1-17 ملاحظة:

معكوس النتيجة (2-1-16) ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، وكمثال على ذلك:

لتكن $X=\{a, b, c\}$ في المثال (2-1-2):

فإن f تطبيق مغلق-G لكنه ليس تطبيق مغلق-G^* لأن $\{a, c\}$ مجموعة مغلقة-g في T_1.

لكن $f(\{a, c\}) = \{a, c\}$ ليست مجموعة مغلقة في T_2.

2-1-18 قضية:

كل تطبيق مغلق-G^{**} يكون تطبيق مغلق-G.

البرهان:

لتكن H مجموعة مغلقة في X.

إذن H مجموعة مغلقة-g في X ملاحظة [2-1-1].

بما إن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}.

إذن $f(H)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

إذن f تطبيق مغلق-G.

□

2-1-19 ملاحظة:

معكوس القضية (2-1-18) ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، وكمثال على ذلك:

لتكن $X=\{a, b, c\}$

$T_1 = \{\phi, X\}$ تبولوجي معرف على X.

$T_2 = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي آخر معرف على X.

التطبيق $f: (X,T_1) \to (X,T_2)$ معرف كما يلي:

$$f(x) = x$$

فإن f تطبيق مغلق-G لكنه ليس تطبيق مغلق-G^{**}

لأن $\{b\}$ مجموعة مغلقة-g في T_1.

لكن $f(\{b\}) = \{b\}$ ليست مجموعة مغلقة-g في T_2.

2-1-20 قضية:

كل تطبيق مغلق-G^{*} يكون تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً، و $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*}.

ولتكن H مجموعة مغلقة-g في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{*}.

فأن $f(H)$ مجموعة مغلقة في Y.

إذن $f(H)$ مجموعة مغلقة-g في Y ملاحظة [2-1-1].

وعليه f تطبيق مغلق-G^{**}.

□

2-1-21 ملاحظة:

معكوس القضية (2-1-20) ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، وكمثال على ذلك:

لتكن $X=\{a, b, c\}$

$T_1 = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X.

$T_2 = \{\phi, X, \{a, c\}\}$ تبولوجي آخر معرف على X.

التطبيق $f : (X,T_1) \rightarrow (X,T_2)$ معرف كما يلي:

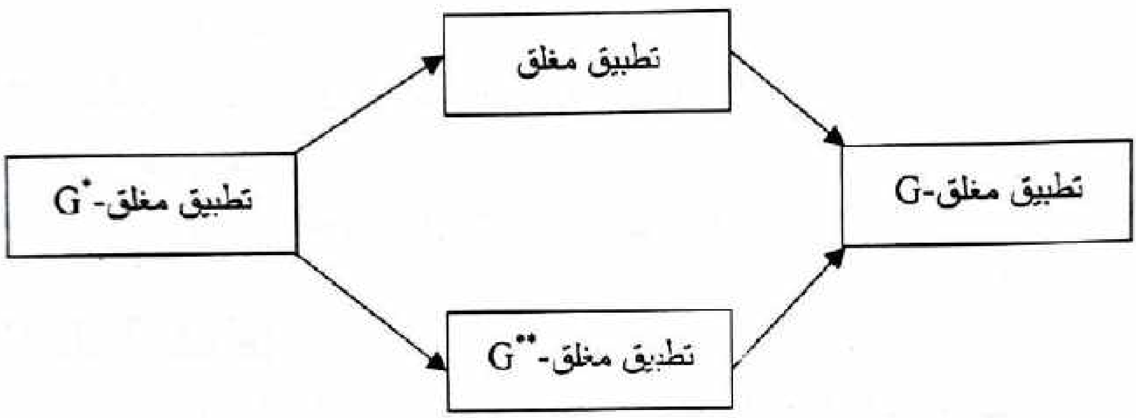
$$f(a) = c \quad \text{و} \quad f(b) = f(c) = b$$

فإن f تطبيق مغلق **-G لكنه ليس تطبيق مغلق *-G

لأن $\{a,c\}$ مجموعة مغلقة-g في T_1.

لكن $f(\{a,c\}) = \{b,c\}$ ليست مجموعة مغلقة-g في T_2.

المخطط التالي يوضح العلاقة بين التطبيق المغلق، المغلق-G، المغلق-*G والمغلق-**G.



(شكل رقم 1)

من المعروف إن التطبيق $f : X \rightarrow Y$ يسمى تطبيق مستمر إذا كان لكل مجموعة مغلقة (أو مفتوحة) F في Y، $f^{-1}(F)$ تكون مجموعة مغلقة (أو مفتوحة) في X.

التعاريف التالية حول التطبيق المستمر - G، المستمر - *G، والتطبيق المستمر - **G.

2-1-22 تعريف:

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً ، يسمى التطبيق $f : X \rightarrow Y$ تطبيق مستمر-G، إذا كان لكل مجموعة مغلقة (أو مفتوحة) F في Y، $f^{-1}(F)$ يكون مجموعة مغلقة-g (أو مفتوحة-g) في X .

2-1-23 مثال:

ليكن كل من X و Y فضاء، و(X, T_1) التبولوجي الضعيف على X، $(Y, T^{`})$ أي تبولوجي على Y، فإن التطبيق $f: (X, T_1) \to (X, T^{`})$ يكون تطبيق مستمر-G.

2-1-24 تعريف:

ليكن كل من X وY فضاء تبولوجي، التطبيق $f: X \to Y$ تطبيق مستمر-G^*، أذا كان لكل مجموعة مغلقة-g (أو مفتوحة-g) F في Y، $f^{-1}(F)$ يكون مجموعة مغلقة (أو مفتوحة) في X.

2-1-25 مثال:

ليكن كل من X و Y أي فضاء.

T_1 : التبولوجي المبعثر (Discrete Topology) على X.

T_2 : أي تبولوجي على Y.

فإن التطبيق $f: (X, T_1) \to (Y, T_2)$ تطبيق مستمر-G^*.

2-1-26 تعريف:

ليكن كل من X و Y فضاء تبولوجي، يسمى التطبيق $f: X \to Y$ تطبيق مستمر-G^{**}، إذا كان لكل مجموعة مغلقة-g (أو مفتوحة-g) في Y، $f^{-1}(F)$ يكون مجموعة مغلقة-g (أو مفتوحة-g) في X.

2-1-27 مثال:

نفس المثال (2-1-25).

2-1-28 ملاحظات وأمثلة

1- كل تطبيق مستمر تطبيق مستمر-G لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح في المثال التالي:

مثال:

ليكن $X=\{a, b, c\}$

$T_1=\{\phi, X\}$ التبولوجي الضعيف على X.

$T_2=\{\phi, X, \{a\},\{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي آخر معرف على X

التطبيق $i: (X, T_1) \to (X, T_2)$ معرف بالشكل التالي: $i(x)=x$

فأن i تطبيق مستمر-G لأن (i^{-1}) لكل مجموعة مغلقة في T_2 يكون مجموعة مغلقة-g في T_1.
لكنه ليس تطبيق مستمر لأن {c} مجموعة مغلقة في T_2 لكن $i^{-1}\{c\}=\{c\}$ ليس مجموعة مغلقة في T_1.

2- كل تطبيق مستمر-G^* تطبيق مستمر. لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح في المثال التالي:

مثال:

ليكن التطبيق $f : (R, T_u) \rightarrow (R, T_I)$ معرف بالشكل التالي:

$$f(x)=2x, \forall x\in R$$

i) f تطبيق مستمر لأن $f^{-1}(R) = R$ و $f^{-1}(\phi) = \phi$ مجموعات مغلقة ومفتوحة.

ii) f ليس تطبيق مستمر-G لأن إذا كانت $G = \{2\}$ مجموعة مفتوحة-g في T_I لكن $f^{-1}(G)=\{1\}$ هي ليست مجموعة مفتوحة في (R, T_u).

3- كل تطبيق مستمر-G^* تطبيق مستمر-G لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح ذلك في المثال التالي:

مثال:

نفس المثال في الملاحظة (1) من هذه الفقرة، حيث i تطبيق مستمر-G لأن (i^{-1}) لكل مجموعة مغلقة في T_2 يكون مغلقة-g في T_1.
وليس تطبيق مستمر-G^* لأن {c} مجموعة مغلقة-g في T_2 لكن $i^{-1}\{c\}=\{c\}$ ليس مجموعة مغلقة في T_1.

4- كل تطبيق مستمر-G^* تطبيق مستمر-G^{**} لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح ذلك في المثال التالي:

مثال:

التطبيق $f : (R, T_I) \rightarrow (R, T_u)$ معرف بالشكل التالي :

$$f(x) = x$$

i- f تطبيق مستمر-G^{**} لأنه إذا أخذنا أية مجموعة مغلقة-g في (R, T_U) فأن f^{-1} لها سيكون مجموعة مغلقة-g في (R, T_I).

ii- f ليس تطبيق مستمر-G^* لأنه إذا كان $G = (2,3)$ مجموعة مفتوحة-g في (R,T_U)
لكن $f^{-1}(G) = (2,3)$ ليس مجموعة مفتوحة في (R, T_I).

5- كل تطبيق مستمر-G^{**} تطبيق مستمر-G لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما يتضح ذلك في المثال التالي:

مثال:

ليكن $X=\{a, b, c\}$

$T_1 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X.

$T_2 = \{\phi, X\}$ التبولوجي الضعيف على X.

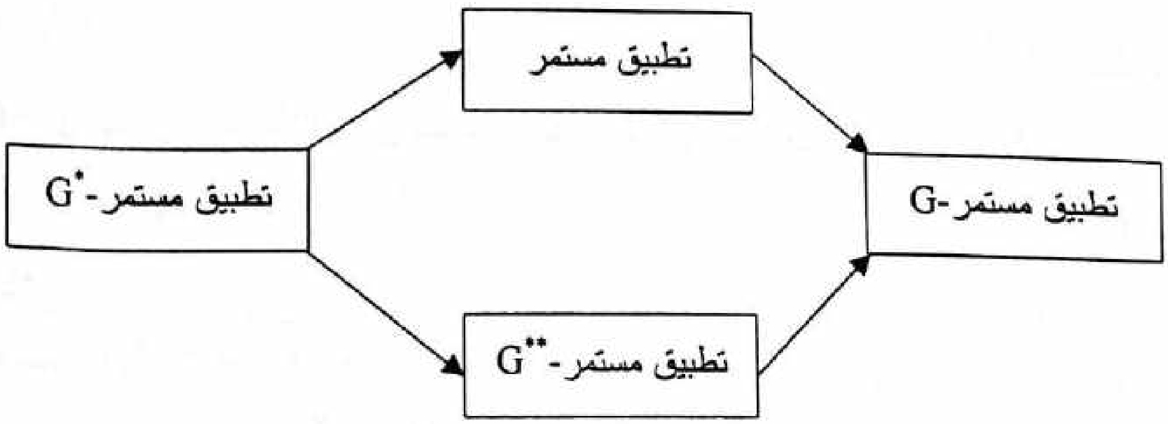
التطبيق $f: (X, T_1) \to (X, T_2)$ معرف بالشكل التالي:

$$f(x) = x$$

i- f تطبيق مستمر-G لأن f^{-1} لكل مجموعة مغلقة في T_2، يكون مجموعة مغلقة-g في T_1. حيث $f^{-1}(X) = X$ ، $f^{-1}(\phi) = \phi$

ii- f ليس تطبيق مستمر-G^{**} لأن $\{b\}$ هي مجموعة مغلقة-g في T_2 لكن $f^{-1}\{b\} = \{b\}$ ليس مجموعة مغلقة-g في T_1.

المخطط التالي يلخص الحقائق أعلاه ويوضح العلاقة بين التطبيق المستمر والمستمر-G والمستمر-*G والمستمر-**G.



(شكل رقم 2)

29-1-2 مبرهنة

ليكن كل من Y, X فضاء تبولوجي. فإذا كان التطبيق $f: X \to Y$ تطبيق مستمر ومغلق-G فإن f يكون تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

للبرهنة على إن f تطبيق مغلق-G^{**}.

نفرض إن A مجموعة مغلقة-g في X.

وسنبرهن إن $f(A)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

لتكن O أي مجموعة مفتوحة في Y بحيث إن $f(A) \subseteq O$.

إذن $A \subseteq f^{-1}(O)$

بما إن f تطبيق مستمر.

إذن $f^{-1}(O)$ مجموعة مفتوحة في X.

وبما إن A مجموعة مغلقة-g في X.

إذن $\overline{A} \subseteq f^{-1}(O)$

إذن $f(\overline{A}) \subseteq O$

بما إن f تطبيق مغلق-G و $\overline{A}$ مجموعة مغلقة.

إذن $f(\overline{A})$ مجموعة مغلقة-g في X محتواة في O.

إذن $\overline{f(\overline{A})} \subseteq O$

بما إن $A \subseteq \overline{A}$.

$$f(A) \subseteq f(\overline{A})$$

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})} \subseteq O$$

إذن $\overline{f(A)} \subseteq O$

إذن $f(A)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

وعليه فإن f تطبيق مغلق-G^{**}

□

من خلال هذه المبرهنة والحقائق السابقة يمكن الحصول على النتائج التالية:

2-1-30 نتائج:

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً.

1. إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر ومغلق فأن f تطبيق مغلق-G^{**}.
2. إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر ومغلق-G^{*} فأن f تطبيق مغلق-G^{**}.
3. إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر-G^{*} ومغلق-G فأن f تطبيق مغلق-G^{**}.
4. إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر-G^{*} ومغلق فأن f تطبيق مغلق-G^{**}.
5. إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر-G^{*} ومغلق-G^{*} فأن f تطبيق مغلق-G^{**}.

2-1-31 مبرهنة:

ليكن كل من Y, X فضاءً تبولوجياً. فإذا كان التطبيق $f: X \to Y$ متباين ومستمر-G ومفتوح فإن f يكون تطبيق مستمر-G^{**}.

البرهان:

للبرهنة على إن f تطبيق مستمر-G^{**}.

نفرض إن W مجموعة مغلقة-g في Y.

وسنبرهن إن $f^{-1}(W)$ مجموعة مغلقة-g في X.

نفرض أن $f^{-1}(W) \subseteq O$ حيث O مجموعة مفتوحة في X.

إذن $W \subseteq f(O)$.

لكن f تطبيق مفتوح، O مجموعة مفتوحة في X.

إذن $f(O)$ مجموعة مفتوحة في Y.

بما إن W مجموعة مغلقة-g في Y.

إذن $\overline{W} \subseteq f(O)$

بما إن f تطبيق متباين

$$f^{-1}(\overline{W}) \subseteq f^{-1}[f(O)] = O$$

إذن $f^{-1}(\overline{W}) \subseteq O$

بما إن f تطبيق مستمر-G و $\overline{W}$ مجموعة مغلقة في Y.

إذن $f^{-1}(\overline{W})$ مجموعة مغلقة-g في X.

إذن $\overline{f^{-1}(\overline{W})} \subseteq O$

لكن $W \subseteq \overline{W}$

$$f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(\overline{W})$$

$$\overline{f^{-1}(W)} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{W})} \subseteq O$$

إذن $\overline{f^{-1}(W)} \subseteq O$

إذن $f^{-1}(W)$ مجموعة مغلقة-g.

إذن f تطبيق مستمر-G^{**}

□

من خلال هذه المبرهنة والحقائق التي تم توضيحها سابقاً يمكن أن نلخص النتائج التالية:

2-1-32 نتائج:

ليكن كل من X و Y فضاءً تبولوجياً.

1. إذا كان التطبيق $f: X \to Y$ متباين ومستمر ومفتوح فأن f تطبيق مستمر-G^{**}.
2. إذا كان التطبيق $f: X \to Y$ متباين ومستمر-G^{*} ومفتوح فأن f تطبيق مستمر-G^{**}.

قصر أنماط معينة من التطبيقات المغلقة-G

Restriction of certain types of G-closed mapping

في هذا البند سوف ندرس قصر التطبيقات المغلقة - G والمغلقة - G^{*} والمغلقة - G^{**}.

فإذا كان التطبيق $f: X \to Y$ يمتلك صفة معينة وكانت A مجموعة جزئية من X، فهل إن $f_A : A \to Y$ يمتلك نفس الصفة، هذا ما سيتم مناقشته خلال هذا البند، ولجميع الصيغ أعلاه.

في البداية سنذكر الحقائق التالية الخاصة بقصر التطبيقات بشكل عام ونقوم بتعميمها على التطبيقات المغلقة-G.

2-2-1 مبرهنة: [23]

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق مستمر، ولتكن $A \subseteq X$ فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مستمر.

2-2-2 مبرهنة: [23]

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق، ولتكن A مجموعة جزئية مغلقة في X،

فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق

2-2-3 ملاحظة: [23]

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق، وكانت $A \subseteq X$،

فإن $f_A: A \to Y$ ليس من الضروري أن يكون تطبيق مغلق.

والآن سنقوم بدراسة قصر التطبيقات المغلقة-G على مجموعات معينة في X.

2-2-4 مبرهنة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G وكانت A مجموعة جزئية مغلقة في X،

فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G

البرهان:

للبرهنة إن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G، لتكن W مجموعة مغلقة في A.

بما إن A مجموعة مغلقة في X.

إذن W مجموعة مغلقة في X.

وبما إن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(W)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

لكن $f_A(W) = f(W)$

إذن $f_A(W)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

وعليه $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G.

□

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G وكانت A مجموعة نظيرة (Inverse set) في X لمجموعة مغلقة B في Y.

أي إن $A = f^{-1}(B)$ حيث B مجموعة مغلقة في Y، فإن $f_A: A \to Y$ يكون تطبيق مغلق-G.

2-2-5 مبرهنة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G وكانت $A = f^{-1}(B)$ حيث B مجموعة مغلقة في Y،

فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G.

البرهان:

لتكن W مجموعة مغلقة في A.

إذن توجد مجموعة مغلقة H في X.

بحيث إن $W = H \cap A$

$$f_A(W) = f(W)$$
$$= f(H \cap A)$$
$$= f(H \cap f^{-1}(B))$$
$$f_A(W) = f(H) \cap B$$ انظر [9]

بما إن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(H)$ مجموعة مغلقة-g في Y، و B مجموعة مغلقة في Y.

إذن $f(H) \cap B$ مجموعة مغلقة-g في Y نتيجة [1-2-8]

إذن $f_A(W)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

وعليه $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G.

□

2-2-6 ملاحظة:

المبرهنة (2-2-5) قد لا تصح إذا كانت B ليست مجموعة مغلقة في Y. كما مبين ذلك في المثال التالي.

2-2-7 مثال:

ليكن $X = \{a, b, c\}$

$T_1 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي على X

$T_2 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي آخر على X

التطبيق $f: (X, T_1) \to (X, T_2)$

معرف كما يلي: $f(x) = (x)$

أفرض إن $B = \{a, b\}$ فإن $A = f^{-1}(B) = \{a, b\}$

نلاحظ إن $\{a\}$ مجموعة مغلقة في T_A بالنسبة للتبولوجي T_1.

ولكن $f_A(\{a\}) = \{a\}$ ليست مجموعة مغلقة-g في T_2.

وعليه فإن $f_A: (A, T_A) \to (X, T_2)$ ليس تطبيق مغلق-G

2-2-8 مبرهنة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^* وكانت A مجموعة جزئية مغلقة-g في X، فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^*.

البرهان:

لتكن G مجموعة مغلقة-g في A.

لكن A مجموعة مغلقة-g في X.

إذن G مجموعة مغلقة-g في X مبرهنة [1-2-7]

بما إن f تطبيق مغلق-G^*

إذن $f(G)$ مجموعة مغلقة في Y.

لكن $f_A(G) = f(G)$

إذن $f_A(G)$ مجموعة مغلقة في Y.

وعليه $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^*.

□

2-2-9 نتيجة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*}، وكانت A مجموعة مغلقة في X، فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*}.

2-2-10 مبرهنة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} وكانت A مجموعة مغلقة-g في X،
فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

البرهان مشابه لبرهان المبرهنة (2-2-8) باستثناء الخطوات التالية:

بما إن f تطبيق مغلق-G^{**}

إذن $f(G)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

إذن $f_A(G)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

وعليه $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}.

□

2-2-11 نتيجة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}، وكانت A مجموعة مغلقة في X،
فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}.

ويمكن أيضاً الحصول على النتيجة المهمة التالية من خلال المبرهنة (2-2-10).

2-2-12 نتيجة:

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر ومغلق-G، وكانت A مجموعة جزئية مغلقة-g في X،
فإن $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

بما إن f تطبيق مستمر ومغلق-G،

إذن f تطبيق مغلق-G^{**} مبرهنة [2-1-29]

وعليه $f_A: A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} مبرهنة [2-2-10]

□

2-2-13 نتيجة:

إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مستمر ومغلق-G، وكانت A مجموعة مغلقة في X،
فإن $f_A : A \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**}.

من خلال المبرهنات والنتائج السابقة في هذا البند يمكن تلخيص الملاحظات التالية:

2-2-14 ملاحظات:

1- إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} أو مغلق-G^{**}، وكانت A مجموعة جزئية مغلقة-g في X، فإن $f_A : A \to Y$ يحمل نفس صفة f.

2- إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق (أو مغلق-G أو مغلق-G^{*} أو مغلق-G^{**})، وكانت A مجموعة مغلقة في X، فإن $f_A : A \to Y$ يحمل نفس صفة f.

تركيب أنماط معينة من التطبيقات المغلقة-G

Composition of certain types of G-closed mappings

في هذا البند سندرس تركيب التطبيقات المغلقة - G والمغلقة-G^{*} والمغلقة-G^{**}.

فإذا كان التطبيق $f: X \rightarrow Y$ يحمل صفة معينة وكان التطبيق $h: Y \rightarrow Z$ يحمل الصفة نفسها فهل إن التطبيق $hof: X \rightarrow Z$ يحمل الصفة نفسها. وإذا كان التطبيق المركب $hof: X \rightarrow Z$ يحمل صفة معينة فهل أن كل من التطبيق h, f يحمل الصفة نفسها. وسيتم في نهاية البند عرض جدول يوضح هذه العلاقات للانماط المذكورة اعلاه.

سنبدأ أولاً بأستذكار حقائق أساسيه تخص تركيب التطبيقات المغلقة.

2-3-1 مبرهنة [6]

ليكن كل من $f: X \rightarrow Y$ و $h: Y \rightarrow Z$ تطبيقاً مغلقاً فأن $hof: X \rightarrow Z$ تطبيق مغلق أيضاً.

2-3-2 ملاحظة:

إذا كان كل من $f: X \rightarrow Y$ و $h: Y \rightarrow Z$ تطبيق مغلق-G، فأن $hof: X \rightarrow Z$ ليس من الضروري أن يكون تطبيق مغلق-G. كما في المثال التالي:

2-3-3 مثال:

ليكن $X=\{a, b, c, d\}$ و $Y=\{k, l, m\}$ و $Z=\{n, o\}$

$T_X=\{\phi, X, \{b, c, d\}\}$ تبولوجي معرف على X.

$T_Y=\{\phi, Y, \{m\}\}$ تبولوجي معرف على Y.

$T_Z=\{\phi, Z, \{n\}\}$ تبولوجي معرف على Z.

وليكن التطبيق $f: X \rightarrow Y$ معرف كما يلي:

$$f(a)=k,\ f(b)=l,\ f(c)=f(d)=m$$

والتطبيق $h: Y \rightarrow Z$ معرف كما يلي:

$$h(k)=n,\ h(l)=h(m)=o$$

واضح أن كل من f و h تطبيق مغلق-G.

لكن hof ليس تطبيق مغلق-G لأن المجموعات المغلقة في X هي $\{\phi, X, \{a\}\}$

$$\begin{aligned} h\,o\,f(a) &= h(f(a)) \\ &= h(k) \\ &= n \end{aligned}$$

حيث $\{n\}$ ليست مجموعة مغلقة-g في Z كونها مجموعة مفتوحة.

ويمكن أن يكون التطبيق hof في الملاحظة (2-3-2) تطبيق مغلق-G بإضافة شرط، وكما سيتبين ذلك في المبرهنة التالية:

2-3-4 مبرهنة:

ليكن كل من X، Y، Z فضاء، وكان Y فضاء $T_{½}$، وليكن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G، و $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق-G، فأن $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G.

البرهان:

لتكن V مجموعة مغلقة في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة-g في Y

بما إن Y فضاء $T_{½}$

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة في Y ([تعريف 10-3-1] فقرة 1)

بما إن h تطبيق مغلق-G

إذن $h(f(V))$ مجموعة مغلقة-g في Z.

لكن $hof(V) = h(f(V))$

إذن $hof(v)$ مجموعة مغلقة-g في Z.

وعليه $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G.

□

يكون التطبيق hof تطبيق مغلق بنفس الشرط إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G وكان $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق وكما مبين في المبرهنة التالية:

2-3-5 مبرهنة:

ليكن X، Y، Z فضاء، وكان Y فضاء $T_{1/2}$، وليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G، و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق، فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق.

البرهان:

لتكن V مجموعة مغلقة في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن Y فضاء $T_{1/2}$.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة في Y (تعريف[1-3-10] فقرة 1)

بما إن h تطبيق مغلق.

إذن $h(f(V))$ مجموعة مغلقة في Z.

لكن $hof(V) = h(f(V))$.

إذن $hof(V)$ مجموعة مغلقة في Z.

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق.

□

المبرهنة التالية تبين أنه إذا كان f تطبيق مغلق-G وكان h تطبيق مغلق-G^{**} فإن hof تطبيق مغلق-G.

2-3-6 مبرهنة:

ليكن كل من X, Y, Z فضاء

وليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G، و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}،

فإن $hof : X \to Z$ يكون تطبيق مغلق-G.

البرهان:

للبرهنة إن hof هو تطبيق مغلق-G

لتكن V مجموعة مغلقة في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن h تطبيق مغلق-G^{**}.

إذن $h(f(V))$ مجموعة مغلقة-g في Z.

لكن $hof(V) = h(f(V))$

إذن $hof(V)$ مجموعة مغلقة-g في Z.

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G.

□

2-3-7 نتيجة:

ليكن كل من X, Y, Z فضاء

وليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G، و $h : Y \to Z$ تطبيق مستمر ومغلق-G،

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G.

البرهان:

بما إن h تطبيق مستمر ومغلق-G

إذن h تطبيق مغلق-G^{**} مبرهنة [2-1-29]

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G مبرهنة [2-3-6]

□

النتيجة التالية تبين إنه إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق وكـــان $h : Y \to Z$ تطبيـــق مغلق-G^{**} فأن hof تطبيق مغلق.

2-3-8 نتيجة:

ليكن كل من X, Y, Z فضاء

وليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}،

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G.

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-g فأن hof تطبيق مغلق-g.

2-3-9 مبرهنة:

ليكن كل من X, Y, Z فضاء

وليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G،

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G.

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلــق-G وكــان $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*} فأن hof يكون تطبيق مغلق.

2-3-10 مبرهنة:

ليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}،

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق.

البرهان:

لتكن V مجموعة مغلقة في X.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن h تطبيق مغلق-G^{*}

فأن $h(f(V))$ مجموعة مغلقة في Y

لكن $hof(V) = h(f(V))$

إذن $hof(V)$ مجموعة مغلقة في Y

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق.

□

أما المبرهنة التالية فتبين بأنه إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} و $h : Y \to Z$ تطبيــق مغلق-G فأن hof تطبيق مغلق-G^{**}.

2-3-11 مبرهنة:

ليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G،

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

لتكن W مجموعة مغلقة-g في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{*}

إذن $f(W)$ مجموعة مغلقة في Y.

بما إن h تطبيق مغلق-G

إذن $h(f(W))$ مجموعة مغلقة-g في Z.

لكن $hof(W) = h(f(W))$

إذن $hof(W)$ مجموعة مغلقة-g في Z.

وعليه $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

□

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} وكان $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق. فأن hof تطبيق مغلق-G^{*}.

2-3-12 مبرهنة:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} و $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق

فأن $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}.

البرهان:

لتكن W مجموعة مغلقة-g في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{*}

إذن $f(W)$ مجموعة مغلقة في Y.

بما إن h تطبيق مغلق

إذن $h(f(W))$ مجموعة مغلقة في Z .

لكن $hof(W) = h(f(W))$

إذن $hof(W)$ مجموعة مغلقة في Z.

وعليه $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}.

□

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق وكـــان $h: Y \to Z$ تطبيــق مغلق-G^{*}. فأن hof تطبيق مغلق.

2-3-13 مبرهنة:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق و $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}

فأن $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق.

البرهان:

لتكن V مجموعة مغلقة في X.

بما إن f تطبيق مغلق.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة في Y.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن h تطبيق مغلق-G^*.

إذن $h(f(V))$ مجموعة مغلقة في Z.

لكن $hof(V) = h(f(V))$.

إذن $hof(V)$ مجموعة مغلقة في Z.

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق.

□

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} وكان $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}. فأن hof تطبيق مغلق-G^{**}.

2-3-14 مبرهنة:

ليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

لتكن W مجموعة مغلقة-g في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{**}

إذن $f(W)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن h تطبيق مغلق-G^{**}

إذن $h(f(W))$ مجموعة مغلقة-g في Z .

لكن $hof(W) = h(f(W))$

إذن $hof(W)$ مجموعة مغلقة-g في Z.

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

□

2-3-15 نتيجة:

ليكن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^* و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

بما إن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^*

إذن $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} قضية[20-1-2].

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**} مبرهنة[12-3-2].

□

المبرهنة التالية تبين إنه إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} وكان $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}. فأن hof تطبيق مغلق-G^{*}.

2-3-16 مبرهنة:

ليكن كل من X, Y, Z فضاء

وليكن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} و $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}

فأن $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}.

البرهان:

لتكن W مجموعة مغلقة-g في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{**}

إذن $f(W)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن h تطبيق مغلق-G^{*}

إذن $h(f(W))$ مجموعة مغلقة في Z .

لكن $hof(W) = h(f(W))$

إذن $hof(W)$ مجموعة مغلقة في Z.

وعليه $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}.

□

2-3-17 نتيجة:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} و $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}

فأن $hof: X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{*}.

البرهان:

بما إن f تطبيق مغلق-G^{*}

إذن f تطبيق مغلق-G^{**} قضية[2-1-20].

وعليه $hof: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{*} مبرهنة[2-3-16].

□

2-3-18 ملاحظة:

1- إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} وكان $h: Y \to Z$ تطبيق مغلق-G فإن $hof: X \to Z$ ليس من الضروري أن يكون أي نمط من أنماط التطبيقات المغلقة-G التي تم دراستها، ويمكن ملاحظة ذلك من خلال المثال [2-3-3].

2- يكون التطبيق $hof : X \to Z$ في الفقرة (1) أعلاه تطبيق مغلق-G^{**} بإضافة نفس الشرط الذي تم إضافته في المبرهنة [2-3-4]، كما يتبين في المبرهنة التالية.

2-3-19 مبرهنة:

إذا كان كل من X، Y، Z فضاء، وكان Y فضاء $T_{½}$

وكان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق-G^{**} و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق-G

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

البرهان:

لتكن W مجموعة مغلقة-g في X.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{**}

فأن $f(W)$ مجموعة مغلقة-g في Y.

بما إن Y فضاء $T_{½}$

إذن $f(W)$ مجموعة مغلقة في Y [تعريف (1-3-10)، فقرة 1]

بما إن h تطبيق مغلق-G

إذن $h(f(W))$ مجموعة مغلقة-g في Z .

لكن $hof(W) = h(f(W))$

إذن $hof(W)$ مجموعة مغلقة-g في Z.

وعليه $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

□

ويمكن الحصول على النتيجة التالية من المبرهنة أعلاه

2-3-20 نتيجة:

ليكن كل من X، Y، Z فضاء، وكان Y فضاء $T_{½}$

وكان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق -G^{**} و $h : Y \to Z$ تطبيق مغلق

فأن $hof : X \to Z$ تطبيق مغلق-G^{**}.

من خلال ما تقدم من المبرهنات والنتائج خلال هذا البند يمكن أن نقدم الجدول التالي الذي يبين جميع الأحتمالات لنتائج تركيب التطبيقات $hof : X \to Z$ للأنماط التي تم دراستها حيث التطبيق $f : X \to Y$ والتطبيق $h : Y \to Z$.

$$hof : X \to Z$$

$h: Y\to Z$ / $f: X\to Y$	مغلق	مغلق-G	مغلق-G^{*}	مغلق-G^{**}
مغلق	مغلق	مغلق-G	مغلق	مغلق-G
مغلق-G	غير ممكن ويكون مغلق إذا كان Y فضاء $T½$	غير ممكن ويكون مغلق-G إذا كان Y فضاء $T½$	مغلق	مغلق-G
مغلق-G^{*}	مغلق-G^{*}	مغلق-G^{**}	مغلق-G^{*}	مغلق-G^{**}
مغلق-G^{**}	غير ممكن ويكون مغلق-G^{**} إذا كان Y فضاء $T½$	غير ممكن ويكون مغلق-G^{**} إذا كان Y فضاء $T½$	مغلق-G^{*}	مغلق-G^{**}

(شكل رقم 3)

2-3-21 ملاحظة

من خلال القضايا التي تم عرضها في الفصل الثاني-البند الأول ومخطط العلاقة بين التطبيقات المغلقة والمغلقة-G والمغلقة-G^{*} والمغلقة-G^{**} (شكل رقم 1) يمكن الوصول بنتائج الجدول أعلاه إلى الصيغة الأضعف فيه وهي تطبيق مغلق-G.

Chapter Three

الفصل الثالث

الفصل الثالث

بديهيات الفصل-G وبعض مبرهنات المحافظة

G-separation Axioms and some Preservation Theorems

المقدمة

سنقدم في هذا الفصل نوعاً جديداً من بديهيات الفصل (Separation Axioms)، وهي بديهيات الفصل-G (G-Separation Axioms). ونقدم مفاهيم جديدة مثل $G\text{-}T_{1/2}$، وسندرس في البند الثاني من هذا الفصل الصفات التي يتم الحفاظ عليها من قبل أنواع معينة من التطبيقات أي دراسة خواص التطبيق $f: X \rightarrow Y$ لينقل خاصية ما من الفضاء X إلى الفضاء Y.

أما في البند الأخير فقد قدمنا عدة مفاهيم جديدة وطرحنا عدداً من المسائل المفتوحة حول هذه المفاهيم.

بديهيات الفصل-G
G-Separation Axioms

في هذا البند نقدم نوعاً جديداً من بديهيات الفصل وهو بديهيات الفصل- G. وستكون هناك مقارنة خلال الدراسة بين بديهيات الفصل الأعتيادية وبديهيات الفصل- G. نبدأ أولاً بأستذكار تعريف فضاء – T_0.

3-1-1 تعريف: [6]

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء-T_0 (أي أن X يحقق بديهيات الفصل T_0) إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين مختلفتين $x, y \in X$ توجد مجموعة مفتوحة W في X، تحتوي أحداهما ولا تحتوي على الأخرى.

والآن سنقدم تعريف فضاء $G\text{-}T_0$.

3-1-2 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء $G\text{-}T_0$ إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين مختلفتين $x, y \in X$ توجد مجموعة مفتوحة-g، W في X تحتوي أحداهما ولا تحتوي الأخرى.

3-1-3 ملاحظات وأمثلة:

1- كل فضاء T_0 يكون فضاء $G\text{-}T_0$، والعكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً، كما موضح في المثال التالي:

ليكن $X=\{a, b, c\}$،

وليكن $T=\{\phi, X, \{a\}\}$ تبولوجي معرف على X.

يلاحظ إن (X, T) فضاء $G\text{-}T_0$ لكنه ليس فضاء T_0 لأنه لو أخذنا النقطتين المختلفتين $b, c \in X$، لا نجد مجموعة مفتوحة تحوي أحدهما ولا تحوي الثانية، وهو فضاء $G\text{-}T_0$ لأن المجموعات المفتوحة-g في X هي: $\{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a,c\}\}$

فلو أخذنا أي نقطتين مختلفتين في X توجد مجموعة مفتوحة-g تحتوي أحدهما ولا تحتوي الأخرى.

2- من الممكن تعريف الفضاء $G\text{-}T_0$ بما يلي:

يقال إن X هو فضاء $G\text{-}T_0$ إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين مختلفتين $x, y \in X$، توجد مجموعة مغلقة-g تحتوي على أحدهما ولا تحتوي الأخرى.

سبق وأن طرحنا مفهوم الفضاء $T_{1/2}$ في الفصل الأول [تعريف 1-3-10] وبينا أنه يقع بين الفضاء T_0 والفضاء T_1 [نتيجة 1-3-13]، أما الآن فنقدم مفهوم جديد هو مفهوم الفضاء $G\text{-}T_{1/2}$ وكما يلي:

3-1-4 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة أحادية أما مجموعة مفتوحة-g أو مجموعة مغلقة-g في X.

3-1-5 مثال:

ليكن $X=\{a, b, c\}$

وليكن $T=\{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تبولوجي معرف على X.

فأن (X, T) يكون فضاء $G\text{-}T_{1/2}$.

3-1-6 ملاحظة:

كل فضاء $T_{1/2}$ يكون فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ والعكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً، كما في المثال التالي:

ليكن $X=\{a, b, c\}$،

وليكن $T=\{\phi, X\}$ التبولوجي الضعيف على X.

فأن (X, T) يكون فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ ولكنه ليس فضاء $T_{1/2}$.

3-1-7 قضية:

كل فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ يكون فضاء $G\text{-}T_0$.

البرهان:

ليكن X فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ و $x_1, x_2 \in X$ فأن $\{x_1\}$ المجموعة الأحادية التي تحوي x_1 تكون أما مجموعة مفتوحة-g أو مجموعة مغلقة-g.

إذا كانت $\{x_1\}$ مجموعة مفتوحة-g فأن $x_2 \notin \{x_1\}$ لذلك فأن X يكون فضاء $G\text{-}T_0$.

أما إذا كانت $\{x_1\}$ مجموعة مغلقة-g فأن $x_2 \notin \{x_1\}$ لذلك فأن X يكون فضاء $G\text{-}T_0$

[ملاحظات وأمثلة 3-1-3 فقرة 2].

□

3-1-8 ملاحظة:

معكوس القضية (3-1-7) ليس من الضروري أن يكون صحيحاً (أنظر المصدر [2]).

والآن نستذكر تعريف الفضاء T_1 للوصول إلى تعريف الفضاء $G\text{-}T_1$.

3-1-9 تعريف: [6]

ليكن (X, T) فضاء، يقال إن X هو فضاء T_1 (يحقق بديهيات الفصل T_1) إذا وفقط إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ بحيث $x_1 \neq x_2$ توجد مجموعتان مفتوحتان G_1 و G_2 في X بحيث أن:

$$x_1 \in G_1,\ x_2 \notin G_1$$
$$x_2 \in G_2,\ x_1 \notin G_2$$

وبالمثل نقدم تعريف الفضاء $G\text{-}T_1$.

3-1-10 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء $G\text{-}T_1$ إذا وفقط إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ بحيث $x_1 \neq x_2$ توجد مجموعتان مفتوحتان-g، W_1 و W_2 في X بحيث أن:

$$x_1 \in W_1,\ x_2 \notin W_1$$
$$x_2 \in W_2,\ x_1 \notin W_2$$

3-1-11 مثال:

ليكن $X=\{a, b, c\}$

وليكن T التبولوجي المبعثر على X.

فأن (X, T) فضاء $G\text{-}T_1$.

3-1-12 ملاحظات وأمثلة:

1- يلاحظ إن كل فضاء T_1 يكون فضاء $G\text{-}T_1$ والعكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً. كما في المثال التالي:

في ملاحظات وأمثلة (6-1-3)

(X, T) هو فضاء $G\text{-}T_1$ ولكنه ليس فضاء T_1.

2- حسب الملاحظة (1) أعلاه فأن (R, T_u) هو فضاء $G\text{-}T_1$ لأنه فضاء T_1.

3- من الممكن تعريف الفضاء $G\text{-}T_1$ بما يلي:

يقال إن X هو فضاء $G\text{-}T_1$ إذا وفقط إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ بحيث $x_1 \neq x_2$ توجد مجموعتان مغلقتان-g، F_1 و F_2 في X بحيث أن: $x_1 \in F_1, x_2 \notin F_1$

$x_2 \in F_2, x_1 \notin F_2$

من المعروف إن من خصائص الفضاءات T_1- الخاصية المهمة التالية: (يكون X فضاء T_1- إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة أحادية مجموعة مغلقة).

المبرهنة التالية توضح ما يناظر هذه الحقيقة فيما يخص الفضاءات $G\text{-}T_1$.

3-1-13 مبرهنة:

ليكن X فضاء، فإن X هو فضاء $G\text{-}T_1$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة أحادية مجموعة مغلقة-g.

البرهان: **الاتجاه الأول**

نفرض إن X هو فضاء $G\text{-}T_1$، ولتكن $x \in X$، وسنبرهن إن المجموعة الأحادية $\{x\}$ مغلقة-g في X.

لبرهنة ذلك، سنبرهن إن $X\text{-}\{x\}$ مجموعة مفتوحة-g في X.

لتكن $y \in X\text{-}\{x\}$

إذن $y \neq x$.

بما إن (X, T) فضاء $G\text{-}T_1$

إذن توجد مجموعتان مفتوحتان-g، W و H بحيث أن: $x \in W, y \notin W$

$y \in H, x \notin H$

بما إن $y \in H$، $x \notin H$

فإن $H \subseteq X\text{-}\{x\}$

إذن $y \in H \subseteq X-\{x\}$

بما إن H مجموعة مفتوحة-g

إذن $X-\{x\}$ مجموعة مفتوحة-g

لذا فإن $\{x\}$ مجموعة مغلقة-g.

الاتجاه الثاني

نفرض إن كل مجموعة أحادية في X هي مجموعة مغلقة-g.

وسنبرهن أن (X, T) فضاء $G\text{-}T_1$.

لتكن $x_1, x_2 \in X$ بحيث إن $x_1 \neq x_2$

لكن كل من المجموعات الأحادية $\{x_1\}$ و $\{x_2\}$ مجموعة مغلقة-g.

إذن $x_1 \in \{x_1\}, x_2 \notin \{x_1\}$

و $x_2 \in \{x_2\}, x_1 \notin \{x_2\}$.

وعليه فإن X فضاء $G\text{-}T_1$ [ملاحظات وأمثلة (3-1-12 فقرة 3)].

□

من المبرهنة السابقة (3-1-13) يمكن الحصول على النتيجة التالية:

3-1-14 نتيجة:

كل فضاء $G\text{-}T_1$ هو فضاء $G\text{-}T_{1/2}$.

3-1-15 ملاحظة:

معكوس النتيجة (3-1-14) ليس من الضروري أن يكون صحيحا كما يتضح ذلك في المثال التالي:

ليكن $X=\{a, b, c\}$

وليكن $T=\{\phi, X, \{a\}\}$ تبولوجي معرف على X.

فأن (X, T) فضاء $G\text{-}T_{1/2}$

ولكنه ليس فضاء $G\text{-}T_1$ لأن المجموعة الأحادية $\{a\}$ ليست مجموعة مغلقة-g [مبرهنة 3-1-13]

أما الآن فسنستذكر تعريف الفضاء T_2 أو (Hausdorff) (هاوسدورف) للوصول إلى تعريف الفضاء $G\text{-}T_2$.

3-1-16 تعريف: [6]

ليكن (X, T) فضاء، يقال إن X هو فضاء T_2- أو (هاوسدورف). إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ ، $x_1 \neq x_2$ توجد مجموعتان مفتوحتان G_1 و G_2 في X بحيث أن:

$x_1 \in G_1, x_2 \in G_2,$
$G_1 \cap G_2 = \phi.$

وبالمثل نعرف الفضاء $G\text{-}T_2$.

3-1-17 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء $G\text{-}T_2$ إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ ، $x_1 \neq x_2$ توجد مجموعتان مفتوحتان-g، W_1 و W_2 في X بحيث أن:

$x_1 \in W_1, x_2 \in W_2,$
$W_1 \cap W_2 = \phi$

3-1-18 ملاحظات وأمثلة:

1- كل فضاء T_2 هو فضاء $G\text{-}T_2$. والعكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، كما في المثال أدناه:

ليكن $X = \{a, b, c\}$

وليكن T_i التبولوجي الضعيف على X.

فأن (X, T_i) يكون فضاء $G\text{-}T_2$، ولكنه ليس فضاء-T_2

2- كل فضاء $G\text{-}T_2$ هو فضاء $G\text{-}T_1$.

بعد ذلك نستذكر تعريف الفضاء المنتظم (Regular space) والفضاء T_3 للوصول إلى تعريف الفضاء المنتظم $G\text{-}T_3$.

3-1-19 تعريف: [6]

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء منتظم (Regular space) إذا كان لكل مجموعة مغلقة F في X ولكل $x \in X$، $x \notin F$ توجد مجموعتان مفتوحتان G_1 و G_2 بحيث أن:

$x \in G_1, F \subseteq G_2,$
$G_1 \cap G_2 = \phi$

ويسمى X فضاء-T_3 إذا كان X فضاء منتظم، وبنفس الوقت فضاء-T_1.

وبالمثل نقدم تعريف الفضاء المنتظم-G (G-regular space) وفضاء $G\text{-}T_3$.

3-1-20 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء منتظم-G (G-regular space) إذا كان لكل مجموعة مغلقة F في X ولكل $x \in X$ بحيث $x \notin F$ توجد مجموعتان مفتوحتان-g، W_1 و W_2 بحيث أن:

$$x \in W_1, F \subseteq W_2,$$
$$W_1 \cap W_2 = \phi$$

ويسمى X فضاء $G\text{-}T_3$ إذا كان X فضاء منتظم-G وبنفس الوقت فضاء-T_1.

وهناك نمط آخر من الفضاءات المنتظمة -G والتي سوف نسميها بالفضاءات المنتظمة-G^* (G^*-regular spaces) وتعرف كما يلي:

3-1-21 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء منتظم -G^* إذا كان لكل مجموعة مغلقة-g، F في X ولكل $x \in X$، $x \notin F$ توجد مجموعتان مفتوحتان W_1 و W_2 بحيث أن:

$$x \in W_1, F \subseteq W_2,$$
$$W_1 \cap W_2 = \phi$$

ويسمى X فضاء $G^*\text{-}T_3$ إذا كان X فضاء منتظم-G^* وبنفس الوقت فضاء-T_1.

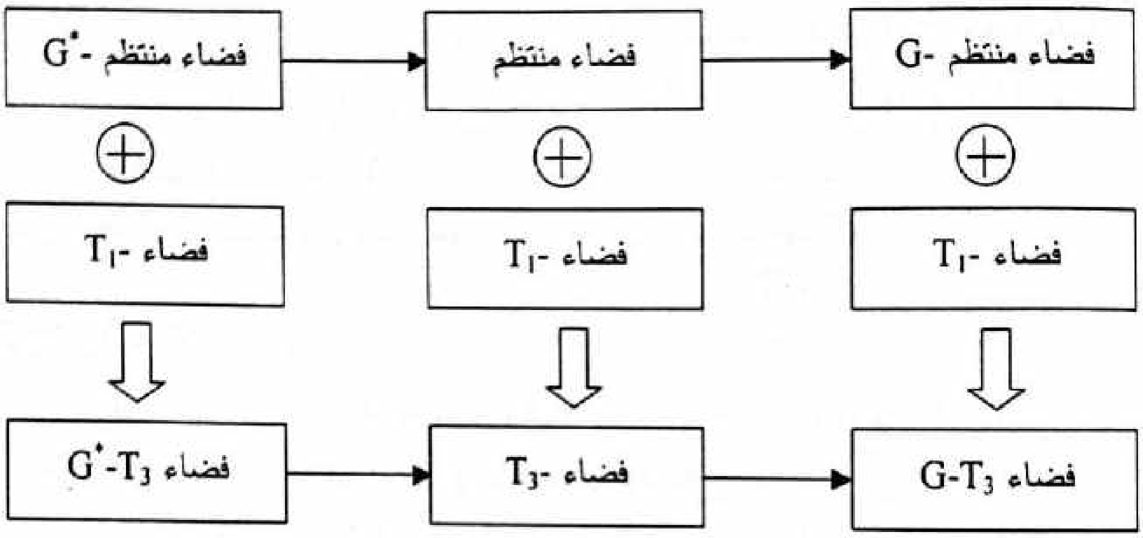
3-1-22 ملاحظات وأمثلة:

1- كل فضاء منتظم -G^* هو فضاء منتظم وكل فضاء منتظم هو فضاء منتظم -G.

2- كل فضاء $G^*\text{-}T_3$ هو فضاء -T_3 وكل فضاء T_3 هو فضاء $G\text{-}T_3$.

والعكس للملاحظات (1، 2) أعلاه ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، أنظر المصدر[20].

المخطط التالي يبين العلاقة بين الفضاء المنتظم والمنتظم -G والمنتظم-G^* وكذلك علاقتها بالفضاءات G^*-T_3 و T_3 و G-T_3.



(شكل رقم 4)

وأخيراً نستذكر تعريف الفضاء السوي (Normal space) والفضاء -T_4 للوصول إلى تعريف الفضاء السوي-G (G-Normal space) والفضاء G-T_4.

3-1-23 تعريف: [6]

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء سوي إذا وفقط إذا كان لكل مجموعتين مغلقتين متباعدتين في X، F_1 و F_2 توجد مجموعتين مفتوحتين متباعدتين G_1 و G_2 في X بحيث أن:

$$F_1 \subseteq G_1,\ F_2 \subseteq G_2.$$

ويسمى X فضاء-T_4 إذا كان فضاء سوي، وبنفس الوقت فضاء-T_1.

وبالمثل نقدم تعريف الفضاء السوي-G وفضاء G-T_4.

3-1-24 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء سوي -G إذا وفقط إذا كان لكل مجموعتين مغلقتين متباعدتين في X، F_1 و F_2 توجد مجموعتين مفتوحتين -g متباعدتين W_1 و W_2 في X بحيث أن: $F_1 \subseteq W_1$ و $F_2 \subseteq W_2$.

ويسمى X فضاء G-T_4 إذا كان فضاء سوي -G، وبنفس الوقت فضاء-T_1.

وكما ذكرنا في الفضاءات المنتظمة -G، فهناك نمط آخر أيضاً من الفضاءات السوية -G والتي سوف نسميها بالفضاءات السوية-G^* (G^*- normal spaces) وتعرف كما يلي:

3-1-25 تعريف:

ليكن X فضاء، يقال إن X هو فضاء سوي -G^* إذا وفقط إذا كان لكل مجموعتين مغلقتين -g متباعدتين في X، V_1 و V_2 توجد مجموعتين مفتوحتين متباعدتين G_1 و G_2 في X بحيث أن: $V_1 \subseteq G_1$ و $V_2 \subseteq G_2$.

ويسمى X فضاء G^*-T_4 إذا كان فضاء سوي -G^*، وبنفس الوقت فضاء-T_1.

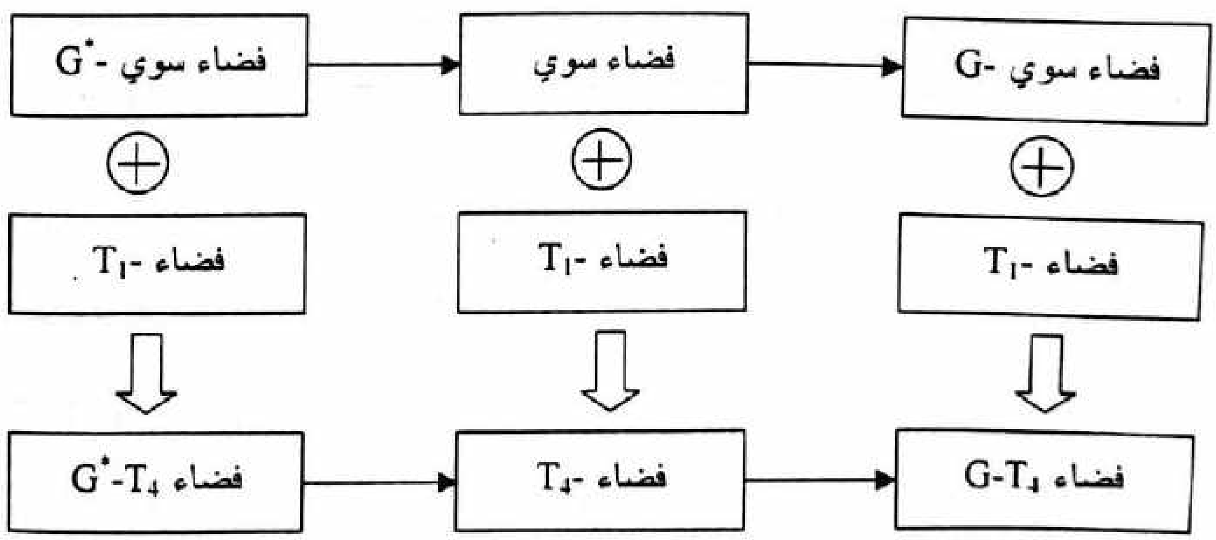
3-1-26 ملاحظات وأمثلة:

1- كل فضاء سوي -G^* هو فضاء سوي وكل فضاء سوي هو فضاء سوي -G.

2- كل فضاء G^*-T_4 هو فضاء -T_4 وكل فضاء T_4 هو فضاء G-T_4.

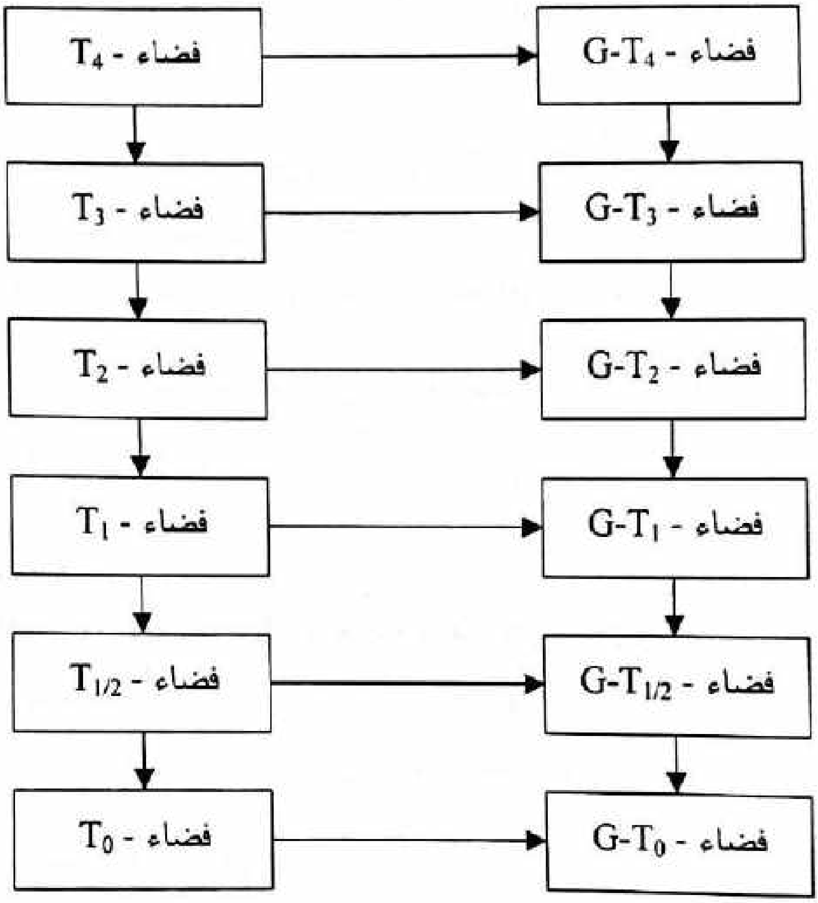
والعكس للملاحظات (1، 2) أعلاه ليس من الضروري أن يكون صحيحاً، أنظر المصدر[20].

المخطط التالي يبين العلاقة بين الفضاء السوي والسوي - G والسوي-G^*، وكذلك علاقتها بالفضاءات G^*-T_4 و T_4 و G-T_4.



(شكل رقم 5)

المخطط التالي يبين العلاقة بين بديهيات الفصل الاعتيادية (الفضاءات الاعتيادية) وبديهيات الفصل -G (الفضاءات -G) التي تم تقديمها خلال البند.



(شكل رقم 6)

مبرهنات المحافظة

Preservation Theorems

في هذا البند ندرس الصفات التي تنتقل بفعل أنواع معينة من التطبيقات من الفضاء X إلى الفضاء Y. فإذا كان X فضاء يمتلك الصفة P فما هي التطبيقات والشروط التي تجعل هذه الصفة P تنتقل إلى Y، أي التي تجعل Y يمتلك نفس الصفة.

وسوف نبدأ أولاً بالمبرهنة التالية التي تبين إن صفة $G\text{-}T_0$ تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y بفعل التطبيقات المتباينة والمغلقة -G^*.

3-2-1 مبرهنة:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق -G^* فأذا كان X هو فضاء $G\text{-}T_0$ فأن Y يكون أيضاً فضاء $G\text{-}T_0$.

البرهان:

ليكن y_1, y_2 نقطتين مختلفتين في Y.

بما أنه f تطبيق متباين فأنه يوجد نقطتين مختلفتين x_1, x_2 في X بحيث إن:

$y_1 = f(x_1)$، $y_2 = f(x_2)$

وبما أن X هو فضاء $G\text{-}T_0$ و x_1، x_2 نقطتين مختلفتين فيه.

إذن توجد مجموعة مغلقة-g، V في X تحتوي أحدهما ولا تحتوي الأخرى [ملاحظات وأمثلة 3-1-3 فقرة 2]

أي أن $x_1 \in V$ و $x_2 \notin V$.

ومنها نحصل على إن $f(x_1) \in f(V)$ و $f(x_2) \notin f(V)$

وبما إن f تطبيق مغلق -G^*.

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة في Y

إذن $f(V)$ مجموعة مغلقة-g في Y ملاحظة [2-1-1]

لكن $y_1 = f(x_1)$، $y_2 = f(x_2)$

إذن $y_1 \in f(V)$، $y_2 \notin f(V)$.

إذن Y هو فضاء $G\text{-}T_0$ [ملاحظات وأمثلة 3-1-3 فقرة 2].

□

3-2-2 ملاحظة:

المبرهنة (3-2-1) أعلاه تبقى صحيحة أيضا إذا كان f تطبيق متباين ومغلق-G^{**} بدلاً من كونه مغلق-G^{*}.

سبق وأن عرفنا الفضاء $T_{1/2}$ [تعريف 1-3-18] والآن سندرس شروط إنتقال هذه الصفة من الفضاء X إلى الفضاء Y، المبرهنة التالية تبين إن صفة $T_{1/2}$ تنتقل من X إلى Y إذا كان التطبيق $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق.

3-2-3 مبرهنة:

ليكن X فضاء $T_{1/2}$ وليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق فأن Y يكون أيضاً فضاء $T_{1/2}$.

البرهان:

ليكن $y \in Y$ نقطة لا على التعيين.

بما أن f تطبيق متباين، فأنه توجد $x \in X$ وحيدة، بحيث إن: $f(x) = y$

بما أن X هو فضاء $T_{1/2}$ فأن كل مجموعة أحادية هي إما مجموعة مغلقة أو مجموعة مفتوحة.

إذن $\{x\}$ إما مجموعة مغلقة أو مجموعة مفتوحة.

إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مغلقة.

بما إن f تطبيق مغلق فأن $f(x)$ هي مجموعة مغلقة في Y.

لكن $f(x) = y$ إذن $\{y\}$ مجموعة مغلقة في Y

أما إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مفتوحة.

بما إن f تطبيق متباين ومغلق فأن f تطبيق مفتوح مبرهنة [2-1-10]

إذن $f(x)$ هي مجموعة مفتوحة في Y.

لكن $f(x) = y$ إذن $\{y\}$ مجموعة مفتوحة في Y.

إذن المجموعة الأحادية $\{y\}$ إما أن تكون مجموعة مغلقة أو مجموعة مفتوحة في Y.

إذن Y فضاء $T_{1/2}$.

□

أما المبرهنة التالية فتبين إن صفة $G\text{-}T_{1/2}$ تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y، إذا كان التطبيق $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق-G^{*}.

3-2-4 مبرهنة:

ليكن X فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ وليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق -G^{*} فــأن Y يكــون فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ أيضاً.

البرهان:

ليكن $y \in Y$ نقطة لا على التعيين.

بما أن f تطبيق متباين.

إذن توجد $x \in X$ نقطة وحيدة بحيث إن: $f(x) = y$

بما أن X هو فضاء $G\text{-}T_{1/2}$ فأن كل مجموعة أحادية أما مجموعة مغلقة-g أو مفتوحة-g.

إذن $\{x\}$ إما مجموعة مغلقة-g أو مفتوحة-g.

إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مغلقة-g.

بما إن f تطبيق مغلق-G^{*} فأن $f(x)$ هي مجموعة مغلقة في Y.

إذن $f(x)$ مجموعة مغلقة-g في Y ملاحظة [1-1-2]

لكن $f(x) = y$ إذن $\{y\}$ مجموعة مغلقة-g في Y

أما إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مفتوحة-g.

بما إن f تطبيق متباين ومغلق-G^{*} فأن f يكافئ تطبيق مفتوح-G^{*} قضية [2-1-12]

إذن $f(x)$ مجموعة مفتوحة في Y.

إذن $f(x)$ مجموعة مفتوحة-g في Y ملاحظة [1-1-5]

لكن $f(x) = y$ إذن $\{y\}$ مجموعة مفتوحة-g في Y.

إذن المجموعة الأحادية $\{y\}$ إما أن تكون مجموعة مغلقة-g أو مجموعة مفتوحة-g.

إذن Y فضاء $G\text{-}T_{1/2}$.

□

3-2-5 ملاحظة:

المبرهنة (3-2-4) تبقى صحيحة إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق -G^{**} بــدلاً من مغلق-G^{*}.

المبرهنة التالية تبين إن صفة $G\text{-}T_1$ تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y بفعل التطبيقــات المتباينة و المغلقة-G^{*}.

3-2-6 مبرهنة:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق -G^*، فأذا كان X فضاء $G\text{-}T_1$ فــأن Y يكــون أيضاً فضاء $G\text{-}T_1$.

البرهان:

لتكن $y \in Y$ نقطة لا على التعيين.

بما أن f تطبيق متباين.

إذن توجد $x \in X$ وحيدة بحيث: $f(x) = y$

بما أن X هو فضاء $G\text{-}T_1$.

فأن كل مجموعة أحادية $\{x\}$ مجموعة مغلقة-g مبرهنة [3-1-13].

بما إن f تطبيق مغلق-G^*.

إذن $f(x)$ مجموعة مغلقة في Y.

لكن $f(x) = y$ إذن $\{y\}$ مجموعة مغلقة في Y.

إذن $\{y\}$ مجموعة مغلقة-g في Y ملاحظة [2-1-1].

وبما أن $y \in Y$ نقطة لا على التعيين.

فأن أي مجموعة أحادية $\{y\}$ تكون مغلقة-g.

إذن Y فضاء $G\text{-}T_1$ مبرهنة [3-1-13].

□

3-2-7 ملاحظة:

المبرهنة (3-2-6) تبقى صحيحة إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق -G^{**}.

المبرهنة التالية تبين إن صفة $G\text{-}T_2$ تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y بفعل التطبيقــات المتباينة والمغلقة-G^*.

3-2-8 مبرهنة

ليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومغلق-G^*، فأذا كان X فضاء $G\text{-}T_2$ فـــأن Y يكـــون أيضاً فضاء $G\text{-}T_2$ أيضاً.

البرهان:

لتكن y_1, y_2 نقطتين لا على التعيين في Y بحيث إن $y_2 \neq y_1$.

بما أن f تطبيق متباين.

إذن توجد نقطتين في X، x_1, x_2 بحيث: $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ و $x_1 \neq x_2$

بما أن X هو فضاء $G\text{-}T_2$.

إذن توجد مجموعتين مفتوحتين-g في X، W_1، W_2

بحيث إن: $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$ و $W_1 \cap W_2 = \phi$.

بما إن f تطبيق متباين ومغلق-G^*.

فأن f تطبيق مفتوح -G^* قضية [2-1-12].

إذن كل من $f(W_1)$ و $f(W_2)$ مجموعة مفتوحة في Y.

إذن كل من $f(W_1)$ و $f(W_2)$ مجموعة مفتوحة-g في Y ملاحظة [1-1-5]

بما إن $x_1 \in W_1$.

إذن $f(x_1) \in f(W_1)$

إذن $y_1 \in f(W_1)$

بما إن $x_2 \in W_2$.

إذن $f(x_2) \in f(W_2)$

إذن $y_2 \in f(W_2)$

للبرهنة إن $f(W_1) \cap f(W_2) = \phi$

بما إن $W_1 \cap W_2 = \phi$.

إذن $f(W_1 \cap W_2) = \phi$

إذن $f(W_1) \cap f(W_2) = \phi$

إذن Y فضاء $G\text{-}T_2$.

□

3-2-9 ملاحظة

المبرهنة (3-2-8) تبقى صحيحة إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومفتوح-G^{*}.

والآن سنقوم بدراســـة خاصيـــة الأنتظـــام-G (G-Regularity) وتحـــت أي الشـــروط والتطبيقات تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y.

من المعلوم إن خاصية الأنتظام تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق مغلق ومستمر ومفتوح [15] وقد تم تعميم هذه الحالة على التطبيقات المغلقة -G وكما يلي:

3-2-10 مبرهنة: [15]

ليكن $f : X \to Y$ تطبيق مستمر مفتوح وشامل ومغلق -G، وكـــان X فضـــاء منتظـــم (Regular) فأن Y يكون فضاء منتظم.

المبرهنة التالية تبين أنه إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق متباين ومستمر ومغلق-G وكـــان X فضاء منتظم-G فإن Y فضاء منتظم-G.

3-2-11 مبرهنة

ليكن X فضاء منتظم -G وليكن $f : X \to Y$ تطبيق متباين ومستمر ومغلق -G فـــأن Y فضاء منتظم -G أيضاً.

البرهان:

لتكن V مجموعة مغلقة في Y، y نقطة في Y أيضا بحيث إن $y \notin V$.

بما إن f تطبيق متباين ومستمر فأن $f^{-1}(V)$ مجموعة مغلقة في X.

و $x = f^{-1}(y)$ نقطة في X بحيث إن $x \notin f^{-1}(V)$.

بما أن X هو فضاء منتظم -G.

إذن توجد مجموعتين مفتوحتين-g، W_1، W_2 في X.

بحيث إن: $x \in W_1$ و $f^{-1}(V) \subseteq W_2$ و $W_1 \cap W_2 = \phi$

بما إن f تطبيق مستمر ومغلق-G.

فأن f تطبيق مغلق-G^{**} مبرهنة [2-1-29]

وبما إن f تطبيق متباين ومغلق-G^{**}.

إذن f تطبيق مفتوح-G^{**} قضية [2-1-13]

إذن كل من $f(W_1)$ و $f(W_2)$ مجموعة مفتوحة-g في Y.

بما إن $x \in W_1$.

إذن $f(x) \in f(W_1)$

إذن $y \in f(W_1)$.

بما إن $f^{-1}(V) \subseteq W_2$

إذن $V \subseteq f(W_2)$

ولإثبات أن $f(W_1) \cap f(W_2) = \phi$

بما إن $W_1 \cap W_2 = \phi$.

إذن $f(W_1 \cap W_2) = \phi$

إذن $f(W_1) \cap f(W_2) = \phi$

وعليه فإن Y فضاء منتظم-G.

□

وأخيراً سنقوم بدراسة خاصية السوي- G (G-Normality) وتحت أي الشروط أو التطبيقات تنتقل من الفضاء X إلى الفضاء Y.

من المعلوم إن خاصية السوي تنتقل من X إلى Y إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق شامل ومستمر ومغلق [15] وقد تم تعميم هذه الحالة على التطبيقات المغلقة-G وكما يلي:

3-2-12 مبرهنة [15]

ليكن X فضاء سوي وليكن $f: X \to Y$ تطبيق مستمر ومغلق-G فأن Y فضاء سوي أيضاً.

المبرهنة التالية تبين أنه إذا كان X فضاء سوي-G وكان $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومستمر ومغلق-G و فإن Y فضاء سوي-G أيضاً.

3-2-13 مبرهنة

ليكن X فضاء سوي -G وليكن $f: X \to Y$ تطبيق متباين ومستمر ومغلق-G فــأن Y فضاء سوي-G أيضاً.

البرهان:

لتكن V_1 و V_2 مجموعتين مغلقتين متباعدتين في Y

أي إن $V_1 \cap V_2 = \phi$.

بما إن f تطبيق مستمر.

إذن $f^{-1}(V_1)$ و $f^{-1}(V_2)$ مجموعتين متباعدتين في X.

بما أن X هو فضاء سوي -G.

إذن توجد مجموعتين مفتوحتين-g، W_1، W_2 في X

بحيث إن: $f^{-1}(V_1) \subseteq W_1$ و $f^{-1}(V_2) \subseteq W_2$ و $W_1 \cap W_2 = \phi$

بما إن f تطبيق مستمر ومغلق-G.

فأن f تطبيق مغلق-G^{**} مبرهنة [2-1-29].

بما إن f تطبيق متباين ومغلق-G^{**}.

إذن f تطبيق مفتوح -G^{**} قضية [2-1-13].

إذن كل من $f(W_1)$ و $f(W_2)$ مجموعتين مفتوحتين-g في Y.

بما إن $f^{-1}(V_1) \subseteq W_1$ فإن $V_1 \subseteq f(W_1)$.

و $f^{-1}(V_2) \subseteq W_2$ فإن $V_2 \subseteq f(W_2)$.

بما إن: $W_1 \cap W_2 = \phi$

إذن $f(W_1 \cap W_2) = f(\phi)$

إذن $f(W_1) \cap f(W_2) = \phi$

عليه فإن Y فضاء سوي -G.

□

مفاهيم جديدة ومسائل مفتوحة
New concepts and open problems

في هذا البند سنقدم بعض المفاهيم الجديدة وعدداً من المسائل المفتوحة حول هذه المفاهيم وعلاقتها بما قدمناه في رسالتنا هذه لتكون بداية لكل من يريد البحث في أي واحدة منها.

المسألة الأولى:

ذكرنا في الفصل الأول تعريف المجموعة المغلقة-g والمجموعة المفتوحة-g ودرسنا خواص هذه المجموعات. سنقدم تعريفاً جديداً وهو تعريف المجموعة المغلقة-g^* والمجموعة المفتوحة-g^*.

تعريف:

ليكن X فضاء ولتكن $A \subseteq X$.

يقال إن A مجموعة مغلقة-g^* إذا كانت $\overline{A} \subseteq U$ كلما كانت $A \subseteq U$ حيث U مجموعة مفتوحة-g في X. ويقال إن A مجموعة مفتوحة-g^* إذا كانت متممتها مجموعة مغلقة-g^*.

الآن نطرح الأسئلة التالية حول هذا المفهوم الجديد.

1. من الواضح إن كل مجموعة مغلقة-g^* هي مجموعة مغلقة-g، إعطِ مثال على مجموعة مغلقة-g بحيث لا تكون مجموعة مغلقة-g^*.
2. دراسة خواص المجموعات المغلقة-g^* والمفتوحة-g^* والتي تناظر الخواص التي درسناها في البند الثالث من الفصل الأول.
3. إذا عرفنا نمط آخر من المجموعات المغلقة-g ولنسميه المجموعات المغلقة-g^{**} وكما يلي:

تعريف:

ليكن X فضاء ولتكن $A \subseteq X$.

يقال إن A مجموعة مغلقة-g^{**} إذا كانت $\overline{A} \subseteq U$ كلما كانت $A \subseteq U$ حيث U مجموعة مفتوحة-g^*. ويقال إن A مجموعة مفتوحة-g^{**} إذا كانت متممتها مجموعة مغلقة-g^{**}.

السؤال:

من الواضح إن كل مجموعة مغلقة-g^* هي مجموعة مغلقة-g^{**}. إعطِ مثالاً على مجموعة مغلقة-g^{**} ولكنها ليست مجموعة مغلقة-g^*.

المسألة الثانية:

درسنا في الفصل الثاني خاصيتي القصر والتركيب عل أنماط معينة من التطبيقات المغلقة-G ومنها المغلقة-G والمغلقة-G^* والمغلقة-G^{**}. المطلوب دراسة جداء أنماط معينة من هذه التطبيقات، إي إنه إذا كان $f_1 : X \to Y$ تطبيق مغلق-G وكان $f_2 : X \to Y$ تطبيق مغلق-G فهل إن الجداء $f_1 \times f_2 : X \times X \to Y \times Y$ يكون تطبيق مغلق-G أيضاً ؟

المسألة الثالثة:

1- عرفنا في الفصل الثالث نمطين من الفضاءات المنتظمة وهما الفضاء المنتظم-G والفضاء المنتظم-G^*. والآن سنقدم تعريف لنمط آخر من الفضاءات المنتظمة وهو الفضاء المنتظم-G^{**} وكما يلي:

تعريف:

يقال إن X فضاء منتظم-G^{**} إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة-g، F في X ولكل نقطة $x \in X$، $x \notin F$، توجد مجموعتين مفتوحتين-g متباعدتين W_1 و W_2 بحيث إن:

$x \in W_1 , \quad F \subseteq W_2$

$W_1 \cap W_2 = \phi$

السؤال:

من الواضح إن كل فضاء منتظم -G^* هو فضاء منتظم-G^{**}. إعط مثالاً على فضاء منتظم-G^{**} وليس فضاء منتظم-G^*.

2- دراسة الموضوع أعلاه بالنسبة للفضاءات السوية -G بدلاً من الفضاءات المنتظمة -G.

المصطلحات العلمية

Discrete topology	1. التبولوجي المبعثر
Indiscrete topology	2. التبولوجي الضعيف
Relative topology	3. التبولوجي النسبي
Usual topology	4. التبولوجي الأعتيادي
Closure	5. أنغلاق
g-closure	6. أنغلاق-g
Separation axioms	7. بديهيات الفصل
G- Separation axioms	8. بديهيات الفصل-G
Product	9. جداء
Composition	10. تركيب
Identity map.	11. تطبيق ذاتي
Bijective map.	12. تطبيق تقابل
Injective map.	13. تطبيق متباين
Surjective map.	14. تطبيق شامل
Closed map.	15. تطبيق مغلق
Open map.	16. تطبيق مفتوح
G-closed map.	17. تطبيق مغلق-G
G-open map.	18. تطبيق مفتوح-G
G^*- closed map.	19. تطبيق مغلق-G^*
G^*- open map.	20. تطبيق مفتوح-G^*
G^{**}- closed map.	21. تطبيق مغلق-G^{**}
G^{**}- open map.	22. تطبيق مفتوح-G^{**}
Continuous map.	23. تطبيق مستمر

G- continuous map.	24. تطبيق مستمر-G
G^*- continuous map.	25. تطبيق مستمر-G^*
G^{**}- continuous map.	26. تطبيق مستمر-G^{**}
Interior	27. داخل
g-interior	28. داخل-g
Topological space	29. فضاء تبولوجي
T_0-space	30. فضاء T_0
G-T_0 space	31. فضاء G-T_0
$T_{1/2}$-space	32. فضاء $T_{1/2}$
G-$T_{1/2}$ space	33. فضاء G-$T_{1/2}$
T_1-space	34. فضاء T_1
G-T_1 space	35. فضاء G-T_1
T_2-space (Hausdorff space)	36. فضاء T_2 (هاوسدورف)
G-T_2 space	37. فضاء G-T_2
T_3-space	38. فضاء T_3
G-T_3 space	39. فضاء G-T_3
T_4-space	40. فضاء T_4
G-T_4 space	41. فضاء G-T_4
Regular space	42. فضاء منتظم
G-regular space	43. فضاء منتظم-G
G^*-regular space	44. فضاء منتظم-G^*
G^{**}-regular space	45. فضاء منتظم-G^{**}
Normal space	46. فضاء سوي
G-normal space	47. فضاء سوي-G
G^*-normal space	48. فضاء سوي-G^*

G^{**}-normal space	49. فضاء سوي- G^{**}
Restriction	50. قصر
Open set	51. مجموعة مفتوحة
Closed set	52. مجموعة مغلقة
g-open set	53. مجموعة مفتوحة-g
g-closed set	54. مجموعة مغلقة-g
Disjoint sets	55. مجموعتين منفصلتين
Separated sets	56. مجموعتين متباعدتين
Inverse set	57. مجموعة نظيرة
Singleton set	58. مجموعة أحادية
Semi closed set	59. مجموعة شبه مغلقة
Semi open set	60. مجموعة شبه مفتوحة
g^*-open set	61. مجموعة مفتوحة- g^*
g^{**}-open set	62. مجموعة مفتوحة- g^{**}
g^*-closed set	63. مجموعة مغلقة- g^*
g^{**}-closed set	64. مجموعة مغلقة- g^{**}
Boundary points	65. نقاط حدودية
Exterior points	66. نقاط خارجية

References

1. Chaber. J., Remark, On open-closed mapping, Fund. Math LXXIV 1972, 197-208.

2. Devi. R, Maki. H, and Balachandran. K, Semi-generalized closed maps and generalized semi-closed maps, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math) 14(1993). 41-54.

3. Dickman, R. F, JR, Regular closed maps, proc. Amer. Math. Soc. Vol. 39 No.2, 1973.

4. Dontchev. J, Ganster. Mand. Noiri. T, Unified operation approach of generalized closed set via Topological ideals, Math. Japonica 49, No.3 (1999) 34, 395-401.

5. ________, and Maki. H, On θ-generalized closed sets, Internet & Math Sei. Vol. 22, No.2 (1999) 239-240.

6. Dugunji. J, Topology, The University of Southern California (1966).

7. Dunham. W, $T_{1/2}$ space, Kyungpook Math. J. 17 (1977) No.2, 161-169.

8. ________, and Levine. N. Further results on Generalized closed set in Topology.

9. Hu. S. T, Elements of General Topology, Holden-Day Inc. San-Francisco, 1965.

10. Kuratowski. K, Topology, Vol. I, Academic press, New York and London, 1968.

11. Levine. N, Semi-open sets and semi-continuing in Topological space, Amer. Math. Monthly, (70), 1963, 36-41.

12. ________, Generalized closed sets in Topology, Rend. Circ. Math. Paleremo (2) 19 (1970), 89-96.

13. Lipschuts. S, General Topology, Prof. of Math. Temple Un. (1965), Schaum's outline series.

14. Liu. C. T, Absolutely closed spaces. Trans. Amer. Math. Soc, 130 (1968), 86-104.

15. Malghan. S. R, Generalized closed maps, J. Karnatak Univ. 27 (1982), 82-88.

16. Munkers. J. R, Topology a first course.

17. Navalagi. G. B, "Definition Bank" in General Topology internet, 2000.

18. Noiri. T, Mildly normal spaces and some Functions, Kyungpook Math. J. 36 (1996), 183-190.

19. ________, Generalized θ-closed sets of almost paracompact space. Jour. Of Math. & Comp. Sci (Math. Ser.), Vol. 9, No.2 (1996), 157-161.

20. ________, and Popa. V, on.G.Regular space and some functions, Mem. Fac. Sci., Kochi. Univ. (Math.), 20 (1999), 67-74.

21. Steen. L. A, Counter examples in Topology, 1970.

22. رقية إبراهيم عبد الله الدليمي (حول أنواع معينة من التطبيقات شبه المغلقة) رسالة ماجستير – الجامعة المستنصرية – 1999.

23. لبنى خالد عبد الرحمن الجلبي (حول التطبيقات المغلقة) رسالة ماجستير – الجامعة المستنصرية – 1998.

Abstract

In this work, we studied some formalisms of G-closed maps such as G^*-closed maps, G^{**}-closed maps and the relations that connect them to each other.

We studied the G-continuos maps, G^*-continuos maps, G^{**}-continuos maps and the relation that connect them to each other too.

Also we have studied G-separation axioms, and the characteristic that can be preserved of some type of maps (preservation theorem) on many spaces such as ($G\text{-}T_0$, $T_{1/2}$, $G\text{-}T_{1/2}$, $G\text{-}T_1$, $G\text{-}T_2$, $G\text{-}T_3$, $G\text{-}T_4$).

Among the results we get are:

1-The following properties of spaces ($G\text{-}T_0$, $G\text{-}T_{1/2}$, $G\text{-}T_1$, $G\text{-}T_2$) are preserved by one to one , G^*- closed mappings.

2- The following properties of spaces (G- Regular, G-Normal) are preserved by one to one, continuous, G- closed mappings.

Republic of Iraq
Ministry of higher education and
scientific research
University of Mustansiriya
College of education – Department
of Mathematics

On
G-Closed Mappings

A Thesis submitted to:

The council of the college of education of AL-Mustansiriya university on partial fulfillment of the requirements for degree of Master of Science in Mathematics

By:

Jamhour Mahmoud Esmail Al-Obaidi

Supervised By:

Dr. Nadir George Mansour

January 2002